

Ausführliches Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie.

Zum Gebrauch
an höheren Lehranstalten und zum Selbststudium.

Von

Dr. H. Servus,
Privat-Docent an der königl. technischen Hochschule zu Charlottenburg und ordentlicher Lehrer am Friedrichs-Realgymnasium in Berlin.

Mit zahlreichen Figuren im Texte.

In 2 Teilen, für Unter- und Obersekunda.

I. Teil:
Von der Lage der Linien und Ebenen im Raume. Von den körperlichen Ecken.



Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1891.

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Börner, Dr. **H.**, Oberlehrer an der Realschule I. O. zu Ruhrort, Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie für höhere Schulen. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [XVIII u. 93 S.] gr. 8. 1879. geh. *M.* 1.60.

Brockmann, **F. J.**, vorm. Oberlehrer der Mathematik und Physik am Königl. Gymnasium zu Cleve, Lehrbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie. Für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. [Mit 46 Holzschnitten im Text.] 2. Auflage. [VIII u. 156 S.] gr. 8. 1880. geh. *M.* 1.60.

——— Lehrbuch der elementaren Geometrie für Gymnasien und Realschulen bearbeitet. 2 Teile. gr. 8. geh. *M.* 3.60.

Einzeln: I. Teil. Die Planimetrie. Mit 139 Figuren in Holzschnitt. 3. verbesserte Aufl. [IX u. 201 S.] 1887. *M.* 2.—
II. — Die Stereometrie. Mit 84 Figuren in Holzschnitt. [IV u. 128 S.] 1875. *M.* 1.60.

——— Materialien zu Dreiecks-Konstruktionen nebst Anwendung auf fast 400 Aufgaben. [VI u. 88 S.] gr. 8. 1888. geh. *M.* 1.20.

——— planimetrische Konstruktionsaufgaben. Eine Vorschule zu des Verfassers Materialien. Enthaltend 501 Aufgaben nebst deren Lösungen. [VI u. 103 S.] gr. 8. 1889. geh. *M.* 1.50.

——— Versuch einer Methodik zur Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben. Mit zahlreichen Beispielen. [VI u. 111 S.] gr. 8. 1889. geh. *M.* 1.50.

Conradt, Dr. **F.**, Oberlehrer am Gymnasium in Belgard, Lehrbuch der ebenen Trigonometrie in stufenmäßiger Anordnung für den Schulgebrauch, nebst einer sich eng an dasselbe anschließenden Sammlung von Übungsaufgaben. [VIII u. 176 S.] gr. 8. 1889. geh. *M.* 2.—

Dronke, Dr. **A.**, Direktor der Realschule I. O. zu Trier, die Kegelschnitte in synthetischer Behandlungsweise für die Prima höherer Lehranstalten. Mit Figuren im Text. [IV u. 75 S.] gr. 8. 1881. geh. *M.* 2.—

Erler, Dr., Professor und I. Oberlehrer am Kgl. Pädagogium bei Züllichau, die Elemente der Kegelschnitte in synthetischer Behandlung. Zum Gebrauche in der Gymnasialprima. Mit einer lithographierten Figurentafel. 3. verb. Aufl. [45 S.] gr. 8. 1887. kart. *M.* 1.20.

Frischauf, Dr. **J.**, Professor an der Universität zu Graz, Elemente der Geometrie. 2. Auflage. [VIII u. 164 S. mit eingedr. Holzschnitten.] gr. 8. 1877. geh. *M.* 2.—

Heinze, Dr. **Karl**, weiland Professor in Köthen, genetische Stereometrie. Bearbeitet von Franz Lucke, Gymnasiallehrer in Zerbst. Mit lithographierten Tafeln. [XII u. 194 S.] gr. 8. 1886. geh. *M.* 6.—

Henrici, **Julius**, Gymnasial-Professor in Heidelberg, u. **P. Treutlein**, Professor am Gymnasium zu Karlsruhe, Lehrbuch der Elementar-Geometrie. 3 Teile. gr. 8. geh. *M.* 7.60.

Einzeln: I. Teil. Gleichheit der planimetrischen Gröfsen. Kongruente Abbildung in der Ebene. Pensum der Tertia. Mit 188 Figuren in Holzschnitt. [VIII u. 152 S.] 1881. *M.* 2.—
II. — Perspektivische Abbildung und Berechnung der planimetrischen Gröfsen. Pensum für Sekunda. (Nebst weiteren Ausführungen für Prima.) Mit 189 Figuren in Holzschnitt und einem (lithogr.) Kärtchen. [VIII u. 242 S.] 1882. *M.* 2.80.
III. — Lage und Gröfse der stereometrischen Gebilde. Abbildungen der Figuren einer Ebene auf eine zweite (Kegelschnitte). Pensum für Prima. Mit 134 Figuren in Zinkographie. [VIII u. 194 S.] 1883. *M.* 2.80.

[Fortsetzung am Ende des Buchs.]



Ausführliches Lehrbuch
der
Stereometrie
und
sphärischen Trigonometrie.

Zum Gebrauch
an höheren Lehranstalten und zum Selbststudium.

Von

Dr. H. Servus,

Privat-Docent an der königl. technischen Hochschule zu Charlottenburg und ordentlicher Lehrer am Friedrichs-Realgymnasium in Berlin.

Mit zahlreichen Figuren im Texte.

In 2 Teilen, für Unter- und Obersekunda.

I. Teil:

Von der Lage der Linien und Ebenen im Raume. Von den körperlichen Ecken.



Leipzig,
Druck und Verlag von B. G. Teubner.
1891.

Vorrede.

Hiermit übergebe ich ein kleines Werk der Öffentlichkeit, das ich als „Ausführliches Lehrbuch der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie" bezeichnet habe. Ich habe wenigstens noch kein Lehrbuch der Stereometrie gefunden, das dieselbe in so ausführlicher Weise behandelt, wie es hier geschehen ist. Ich habe dasselbe in fünf Abschnitte zerlegt:

I. Von der Lage der Linien und Ebenen im Raume.
II. Von den körperlichen Ecken.
III. Vom Prisma, Parallelepipedon, Pyramide, Kegel, Cylinder und Kugel.
IV. Von den regulären Körpern.
V. Die sphärische Trigonometrie.

Die sphärische Trigonometrie habe ich direkt aus den Lehrsätzen über die körperlichen Ecken abgeleitet, aus denen sie sich ja ohne weiteres und ohne Schwierigkeiten von selbst ergiebt. Von einer Anwendung derselben auf einfache Probleme der Astronomie und mathematischen Geographie habe ich hier gänzlich Abstand genommen und behalte mir diese Aufgabe für eine ausführliche Behandlung noch vor.

Besonderen Wert habe ich bei der Abfassung dieses Werkes auch auf die Bestimmung des Rauminhaltes der Körper gelegt, und die hier angegebene Methode für Körper, deren Querschnitte eine Funktion dritten Grades des Abstandes von der oberen Grundfläche sind, habe ich mir im Verlauf meiner Vorlesungen an der königlichen technischen Hochschule zu Charlottenburg und den Unterrichtsstunden in der Prima des Friedrichs-Realgymnasiums zu

Berlin selbst gebildet. Die historischen Hinweise die Simpsonsche Regel betreffend werden gewiß Anklang finden, ebenso wie die Bestimmung des Rauminhaltes der Körper nach dieser so bequemen und einfachen Regel. Von der Theorie der Kegelschnitte habe ich hier ganz abgesehen; diese habe ich mit großer Ausführlichkeit in meinem Werke „Die analytische Geometrie der Ebene" behandelt, nur auf den Wechselschnitt beim Kegel und Cylinder bin ich näher eingegangen

Die beiden ersten Abschnitte bilden den ersten Band, der wesentlich für Untersekunda berechnet ist, die übrigen Abschnitte bilden den zweiten Band, der für Obersekunda und Prima bestimmt ist.

Die Lehre von der Stereometrie wird in den höheren Lehranstalten noch viel zu wenig gewürdigt. Was nützen dem von der Schule mit dem Zeugnis für den einjährigen Dienst abgehenden Schüler z. B. die unvollständigen Lehren der Trigonometrie? Wäre es da nicht besser, wenn ihm in der Schule eine körperliche Anschauungsweise beigebracht würde, wenn er imstande wäre, sich die Lage von Ebenen zu einander, die Gestalt, Oberfläche u. s. w. der Körper im Geiste vorzustellen? Ich bin der Meinung, daß hier der mathematische Unterricht an höheren Lehranstalten einer großen Umänderung bedürfte. So wie er jetzt beschaffen ist, kann er auf die Dauer nicht bestehen bleiben. So wie der kleine Schüler mit dem Anschauungsunterricht beginnt, so lege man auch in dem geometrisch-mathematischen Unterricht das Hauptgewicht auf die Anschauung. Müssen wir denn durchaus noch an der Euklidischen Geometrie festhalten? Warum sollen wir denn nicht mit wirklichen Dreiecken in der Hand die Kongruenzsätze beweisen können, warum denn nur mit reinen Verstandesbegriffen? Ist es nicht ein betrübendes Gefühl für den Lehrer, wenn er findet, daß sein schöner Euklidischer Beweis durch so oftmalige Wiederholung schließlich auswendig gelernt ist, ohne daß der Schüler ein wirkliches tieferes Verständnis dafür besitzt? Bei der Mehrzahl der Schüler wird dies zutreffen und jeder Lehrer wird diese Bemerkung oft genug gemacht haben. Darum fort mit den reinen Verstandesbegriffen aus den mittleren Klassen, man setze die Anschauung dafür, und man wird mit den

besten Erfolgen belohnt werden; daß die Verstandesbegriffe mit steigenden Klassen eingeführt und vermehrt werden müssen, ist wohl an sich klar, darauf brauche ich wohl nicht erst hinzuweisen.

Die Frage, ob man den mathematischen Unterricht nicht vielleicht überhaupt mit der Stereometrie beginnen sollte, will ich hier unerörtert lassen. Ich für meinen Teil halte dies für möglich und der Forderung nach Anschauung wäre damit im höchsten Maße genügt.

Wenn einmal eine Reform des gesamten Unterrichts stattfinden sollte, so hoffe ich, daß dieselbe am mathematischen Unterricht nicht vorbei gehe; hier gerade ertönt bei den Schülern der Ruf nach Anschauung, diese fordere man statt der Euklidischen Geometrie, und die Unlust zu den mathematischen Wissenschaften, die jetzt eine Thatsache ist, wird mehr und mehr verschwinden.

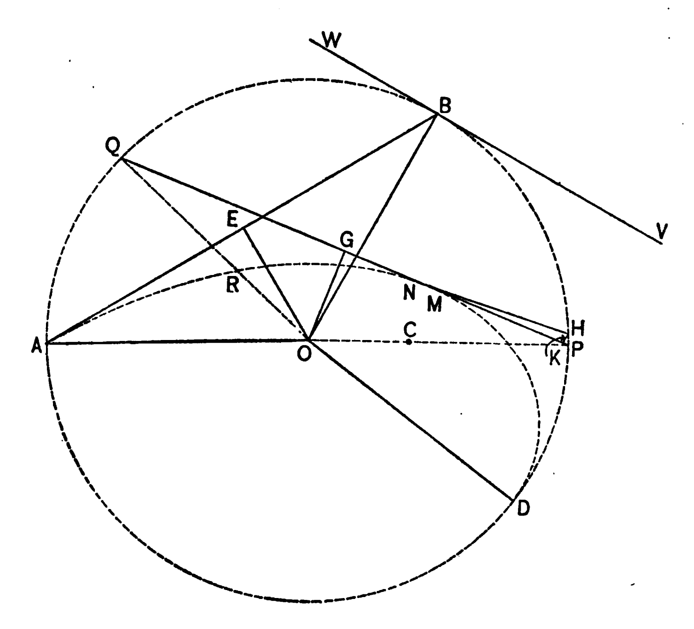
Ich habe in dem vorliegenden Werke möglichst große Klarheit und Einfachheit angestrebt, und ich hoffe, daß mir dies in der gewünschten Weise gelungen ist. Auch der Schüler wird imstande sein den hier bewiesenen Lehrsätzen ohne Schwierigkeit zu folgen.

So hoffe ich denn, daß das kleine Werk überall Freunde und Gönner finden möge.

Charlottenburg, den 15. Oktober 1890.

Dr. H. Servus.

A dog in one part of a circular walk, perceives a hare in another part of the walk, distant from him $2a$ degrees. They both start at the same moment, the hare keeping in the walk, and the dog always running directly towards the hare. How far will the hare run before being caught, supposing his velocity to be to that of the dog as n to 1? n being any fraction less than 1.



Let A be the position of the dog, and B that of the hare at the start; the arc AB or the angle AOB being $2a$ degrees. The hare keeps in the circumference, while the dog, running always directly towards the hare, describes the curve $ARNMD$, catching him at D.

Let D be the origin, and P the position of the hare at any time; draw PM tangent to the curve DMN, touching it at M; then is M the corresponding position of the dog. Let $DP = x$, $DM = z$, and the tangent PM (the direct distance between the dog and hare) $= y$. Let H be another position of the hare, indefinitely near to P; draw HN tangent to the curve DMN, touching it at N; then is N the corresponding

position of the dog; also from H draw HK perpendicular to PM. Then $PH=dx$, $MN=dz$; y has been increased by MN and diminished by PK; hence $dy=MN-PK$, or $dy=dz-PK=\frac{dx}{n}-PK$.

Produce the tangent PM till it cuts the circumference in Q; draw the radii OP, OQ, and from O let fall on PQ the perpendicular OG. Let the angle POQ be 2θ; then $POG=\theta$. The two right triangles HKP, PGO, are similar; for OPH being a right angle, the angle HPK is the complement of GPO, and therefore equal to GOP. From the similarity of the triangles we have $HP:PK=OP:OG$, or $dx:PK=1:\cos\theta$; then $PK=\cos\theta\,dx$. Substituting this value of PK in the equation $dy=\frac{dx}{n}-PK$, it becomes $dy=\frac{dx}{n}-\cos\theta\,dx$. Integrating, we have $y=\frac{x}{n}-\int\cos\theta\,dx=\frac{x}{n}-x\cos\theta+\int x\sin\theta\,d\theta$. This needs no correction, for, at the origin D, x and y are each equal to 0. Now, if we could obtain θ in terms of x, or x in terms of θ, we might be able to find the value of $\int x\sin\theta\,d\theta$, and we would then have the invariable relation between x, y and θ at every point of the curve. This we are unable to do; however, when the hare arrives at B and the dog at A, the variable angle θ becomes the constant angle BOE or a; hence at this point $d\theta=0$, and consequently $\int x\sin\theta\,d\theta=0$; moreover, y becomes equal to the constant line $AB=2\sin a$ (radius being taken as unity). Then for this position our equation becomes $2\sin a=\frac{x}{n}-x\cos a$, or $2n\sin a=x(1-n\cos a)$, and $x=\frac{2n\sin a}{1-n\cos a}$, the distance run by the hare before being caught. If, instead of running from B to the right, the hare had run from B to the left, we would have found $dy=MN+PK$, and consequently $x=\frac{2n\sin a}{1+n\cos a}$.

If now at B we draw the tangent VBW, we see that the angle ABV is the supplement of BOE or a. Calling the angle ABV, B, we have $\sin a=\sin B$, $\cos a=-\cos B$; and putting AB or $2\sin B=a$, and substituting these in our equation, it becomes $x=\frac{2an}{1+n\cos B}$, and this is the form which we shall use; because this one equation gives us the value of x, whether the hare runs from B to the right, or from B to the left; a is the direct distance between the two animals at the start, and B the angle between the line connecting the two at the start, and the direction in which the pursued animal runs.

A very remarkable circumstance is that when $B=90^\circ$, that is, when the animals are at opposite extremities of a diameter at the start, the dog will always have to run a distance equal to the diameter of the circle before overtaking the hare. For then our equation $x=\frac{an}{1+n\cos B}$ becomes simply $x=an$; and $z=\frac{x}{n}=a$, the diameter.

The equation $x=\frac{an}{1+n\cos B}$ gives the value of x, whether the hare runs from the dog, or towards the dog; $\cos B$ being negative in the former case, and positive in the latter. Now if we suppose the arc AB at the start to be indefinitely small, so as to coincide with its chord, and if the animals are about to run towards each other, it is evident that in this case n may be any number whatever.

If we suppose the hare, starting at B, to run along the tangent BV instead of along the arc BPD, the dog still starting from A, the equation of the curve of pursuit is

$$2x=\frac{y^{1+n}}{1+n}\,\frac{(1+\cos B)^{\frac{1-n}{2}}}{a^n(1-\cos B)^{\frac{1+n}{2}}}-\frac{y^{1-n}}{1-n}\,\frac{a^n(1-\cos B)^{\frac{1+n}{2}}}{(1+\cos B)^{\frac{1-n}{2}}}+\frac{2an(1-n\cos B)}{1-n^2},$$

which, when $y=0$, that is, when the dog overtakes the hare, becomes $x=\frac{an(1-n\cos B)}{1-n^2}$. If now we multiply both numerator and denominator of our equation $x=\frac{an}{1+n\cos B}$ by $1-n\cos B$, it becomes $x=\frac{an(1-n\cos B)}{1-n^2\cos^2 B}$. So we see that the distance run in a straight line is to the distance run in the arc of a circle, as $1-n^2\cos^2 B$ is to $1-n^2$.

Again, if in the two equations $x=\frac{an(1-n\cos B)}{1-n^2}$ and $x=\frac{an}{1+n\cos B}$ we make $B=180^\circ$, the equations become identical, each becoming $x=\frac{an}{1-n}$. With regard to the first, the supposition $B=180^\circ$ throws the line BA round till it becomes a prolongation of VB, causing the dog and hare to run in the same straight line; then y becomes $=0$ in the equation of the curve, and gives $x=\frac{an}{1-n}$ for the distance run by the hare before being caught. With regard to the second equation, if we suppose the radius BO to be indefinitely prolonged, and various points to be taken on this prolongation; and with these points as

centres circumferences be described, all tangent to each other at B; then if BA be turned round B as a pivot till it becomes a chord in a larger, and then in a larger circle; it is evident that the larger the circle is, the more nearly will BA come to be a prolongation of VB. But VB and BA can never become a straight line; that is, the angle B can never become 180° until the radius of the circle in which BA is a chord becomes infinite; then, any portion of the circumference becomes a straight line, and the equation becomes identical with the first, as it should do.

The above figure was constructed with AOB or $2a = 120°$; hence $a = 60°$; and $B = 120°$; and $n = \frac{2}{3}$. Then, our equation $x = \frac{an}{1+n\cos B} = \frac{2n\sin B}{1+n\cos B}$, becomes $x = \frac{\frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\sqrt{3}}{1-\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3} = 1.732$ radii $=$ arc BPD; and $1.732 \times 57°.3 = 99°.2 =$ angle BOD.

If, in the equation of the curve of pursuit above, we make $B = 90°$, the equation becomes $2x = \frac{y^{1+n}a^{-n}}{1+n} - \frac{y^{1-n}a^{n}}{1-n} + \frac{2an}{1-n^2}$, the well-known form, first discovered by the celebrated mathematician, Thomas Simpson;* and it was by following his method that I obtained the general equation given above.

L. Hall Grandgent

* Simpson's Fluxions p 243

I. Abschnitt.

Von der Lage der Linien und Ebenen im Raume.

§ 1. Erklärung: Eine Ebene oder ebene Fläche ist eine solche Fläche, bei welcher man von jedem ihrer Punkte nach allen Richtungen hin in ihr gerade Linien ziehen kann.

Der Zusatz: „nach allen Richtungen hin" ist hier von ganz besonderer Wichtigkeit; denn der Cylinder und der Kegel sind auch Flächen, bei welchen man in ihnen gerade Linien ziehen kann, allein nur nach einer bestimmten Richtung hin, nicht aber nach allen beliebigen Richtungen hin. Deshalb eben gehören sie zu den krummen Flächen.

Die Lage einer Ebene im Raume ist bestimmt:

1) durch drei Punkte, welche nicht in einer geraden Linie liegen,

2) durch eine Linie und einen Punkt außerhalb derselben,

3) durch zwei sich schneidende Linien,

4) durch zwei parallele Linien.

In jedem dieser vier Fälle kann man durch die gegebenen Punkte oder Linien eine Ebene legen, aber stets nur eine einzige.

§ 2. Zwei Linien im Raume können, falls sie nicht zusammenfallen, folgende Lagen haben:

1) sie schneiden sich in einem Punkte,

2) sie sind parallel,

3) sie schneiden sich nicht, sind aber auch nicht parallel; man nennt sie windschief.

Durch einen Punkt im Raume kann man zu einer Linie nur eine Parallele legen.

Anmerkung: In der Geometrie nennen wir zwei Linien parallel, wenn sie beständig neben einander herlaufen, sich also nie schneiden. In der Stereometrie genügt dies aber noch nicht; es muß hier, wenn man die Parallelität beweisen will, gezeigt werden, daß sie 1) beständig neben einander herlaufen und 2) daß sie in derselben Ebene liegen.

§ 3. Eine Ebene und eine Linie im Raume können folgende Lagen zu einander haben:

1) die Linie liegt ganz in der Ebene; dies ist der Fall, wenn sie zwei Punkte mit der Ebene gemein hat;

2) sie schneidet die Ebene, hat also nur einen Punkt mit ihr gemein;

3) die Linie ist parallel zur Ebene, hat also keinen Punkt mit ihr gemein, wie weit man auch beide verlängern mag.

Anmerkung. Durch eine Linie eine Ebene legen heißt sie so legen, daß alle Punkte der Linie in die Ebene zu liegen kommen. Eine Linie durch eine Ebene schneiden heißt, die Ebene so legen, daß sie mit der Linie nur einen einzigen Punkt gemein hat, daß nur ein Punkt der Linie in die Ebene zu liegen kommt.

§ 4. Zwei Ebenen können, falls sie nicht zusammenfallen, folgende Lage zu einander haben:

1) sie schneiden sich in einer geraden Linie,

2) sie sind parallel, können also nie einen Punkt gemeinsam haben.

Anmerkung: Der Durchschnitt zweier Ebenen ist eine gerade Linie. Denn wäre der Durchschnitt eine krumme Linie, so würden beiden Ebenen mehr als zwei Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, gemeinsam sein, sie würden also gänzlich zusammenfallen und sich gar nicht unterscheiden. Liegt ferner eine gerade Linie in zwei Ebenen zugleich, so kann sie nur die Durchschnittslinie der beiden Ebenen sein, und liegt ein Punkt zu gleicher Zeit in zwei Ebenen, so muß er ein Punkt der Durchschnittslinie beider Ebenen sein.

§ 5. Drei Ebenen können, falls sie nicht zusammenfallen, folgende Lagen zu einander haben:

1) Alle drei sind parallel zu einander, keine hat also mit einer der anderen Ebenen einen Punkt gemein.

2) Zwei der Ebenen sind einander parallel und werden von der dritten geschnitten; die Durchschnittslinien sind dann stets parallel.

3) Alle drei Ebenen schneiden sich und zwar entweder

a) in einer einzigen geraden Linie, oder

b) in drei geraden Linien.

Im letzteren Falle sind die drei Durchschnittslinien entweder alle drei parallel oder alle drei schneiden sich in einem Punkte.

§ 6. Schneiden sich drei Ebenen in drei Durchschnittslinien, die sich in einem Punkte schneiden, so nennt man den von ihnen eingeschlossenen Raum, der nach der einen Seite hin unbegrenzt ist, eine dreikantige oder dreiseitige körperliche Ecke, bisweilen auch ein körperliches Dreieck. Die Durchschnittslinien werden die Kanten, ihr Durchschnittspunkt die Spitze und die Ebenen zwischen je zwei sich schneidenden Kanten die Seiten der körperlichen Ecke genannt.

Zieht man von einem Punkte im Raume aus vier, fünf oder mehr gerade Linien nach den verschiedensten Richtungen hin, und legt durch je zwei aufeinanderfolgende eine Ebene, so bilden alle diese Ebenen eine vierseitige, fünfseitige oder mehrseitige körperliche Ecke. Schneidet man alle Kanten durch ein und dieselbe Ebene, so entsteht ein von allen Seiten begrenzter Raum, ein Körper. Die geringste Anzahl der Ebenen, die einen Körper begrenzen können, ist vier; er entsteht, wenn man eine dreiseitige körperliche Ecke durch eine Ebene durchschneidet. Von weniger als vier Ebenen kann ein Körper nicht begrenzt werden.

A. Eine Ebene und eine Linie.

Erklärung: Eine Linie steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf jeder Linie senkrecht steht, die in der Ebene liegt und durch ihren Durchschnittspunkt mit der Ebene geht.

§ 7. **Lehrsatz:** Wenn eine gerade Linie auf zwei in einer Ebene liegenden und sich schneidenden Linien senkrecht steht, so steht sie auch auf der Ebene selbst senkrecht.

Voraussetzung: $AB \perp AN$ und $AB \perp AM$.

Behauptung: $AB \perp$ auf der Ebene E.

Beweis: Bei diesem Beweise hat man zu zeigen, daß AB auch auf jeder anderen Linie in der Ebene E, welche durch A geht, senkrecht steht, eine solche Linie sei AP. Man schneide die Schenkel

des Winkels, in dessen Ebene AP liegt, durch eine beliebige Linie NM, welche AP in P schneide. Man mache ferner $AC = AB$ und verbinde B und C mit den Punkten N, P und M. Dann ist:

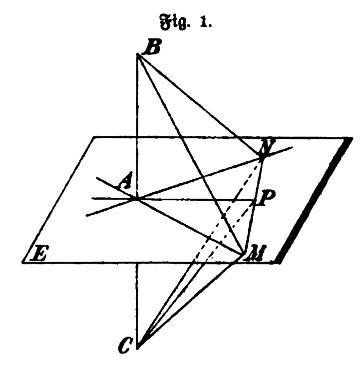


Fig. 1.

$$\triangle BAN \cong \triangle CAN$$
$$\triangle BAM \cong \triangle CAM.$$

(Aus Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels:

$$AB = AC, \quad AN = AN, \quad \sphericalangle BAN = CAN \text{ als } R,$$
$$AB = AC, \quad AM = AM, \quad \sphericalangle BAM = CAM \text{ als } R.)$$

Folglich ist:

$$BN = CN$$
$$BM = CM.$$

Es ist ferner:

$$\triangle BNM \cong \triangle CNM;$$

denn

$$BN = CN, \quad BM = CM, \quad NM = NM.$$

Also ist

$$\sphericalangle BNM = \sphericalangle CNM.$$

Es folgt nun

$$\triangle BNP \cong \triangle CNP$$

(aus Gleichheit zweier Seiten und des eingeschlossenen Winkels:

$$BN = CN, \quad NP = NP; \quad \sphericalangle BNP = CNP),$$

es ist also:

$$BP = CP.$$

Folglich ist auch:

$$\triangle BAP \cong \triangle CAP.$$

Da

$$AB = BC, \quad BP = CP, \quad AP = AP.$$

Folglich $\sphericalangle BAP = \sphericalangle CAP.$

Da dies nun Nebenwinkel sind, so muß jeder von ihnen ein Rechter sein, d. h. $AB \perp AP$.

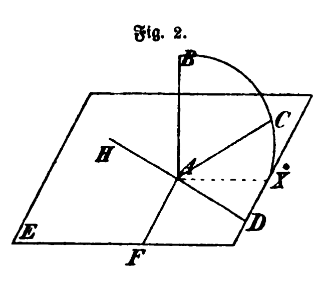
Man nennt die Gerade das Lot, die Senkrechte oder Normale der Ebene E.

§ 8. **Lehrsatz:** Wenn auf einer beliebigen Linie AB im Punkte A beliebig viele Linien AC, AD, AF, AH u. s. w. senkrecht stehen, so liegen sie alle in einer Ebene, auf welcher dann auch AB senkrecht steht.

Voraussetzung: AC, AD, AF, AH senkrecht auf AB.

Beweis: Durch zwei dieser Linien kann man eine Ebene legen z. B. durch AD und AF. Diese Ebene sei E. Es ist dann nach dem vorigen Satze $AB \perp E$. Angenommen AC läge nicht in der Ebene E, so kann man durch AB und AC eine Ebene legen, welche die Ebene E z. B. in AX durchschneidet. Dann ist $AB \perp AX$. Da nun aber nach der Voraussetzung $AB \perp AC$ steht, so müßte auch $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAX$ sein, d. h. ein Teil müßte dem Ganzen gleich sein. Da wir also bei unserer Annahme auf einen Widerspruch kommen, so muß unsere Annahme falsch sein, d. h. es muß auch AC in der Ebene E liegen. Was sich aber von AC beweisen läßt, läßt sich von jeder andern der genannten Linien auch beweisen. Sie liegen also alle in der Ebene E.

Fig. 2.



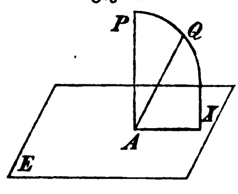
§ 9. **Lehrsatz:** In einem Punkte A einer Ebene E ist auf E nur **ein** Lot zu errichten möglich.

Beweis (indirekt): Angenommen es gäbe im Punkte A auf E zwei Lote AP und AQ, dann kann man durch beide eine Ebene legen, welche E in der Linie AX schneidet. Dann müßte

$$PAX = QAX$$

als rechte Winkel sein, d. h. es müßte wieder der Teil gleich dem Ganzen sein, was unmöglich ist. Unsere Annahme muß also falsch sein, d. h. es giebt in dem Punkte A auf E nur ein einziges Lot.

Fig. 3.

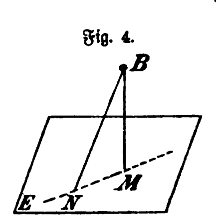


§ 9a. **Lehrsatz:** Von einem Punkte B außerhalb einer Ebene E ist auf E nur **ein** Lot zu fällen möglich, und diese Senkrechte ist stets die kürzeste Verbindungslinie

aller Punkte der Ebene E mit B. Sie wird die Entfernung des Punktes B von der Ebene E genannt.

Beweis: Angenommen es gäbe vom Punkte B aus auf E zwei Lote BM und BN, dann hätte das Dreieck NBM zwei rechte Winkel, was unmöglich ist. Unsere Annahme muß also falsch sein, es kann also von B auf E nur ein einziges Lot geben.

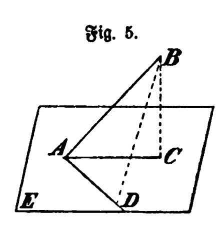
Fig. 4.



§ 10. Wenn nun eine Linie AB nicht senkrecht auf einer Ebene E steht, so bildet sie mit den Linien, die ich durch ihren Fußpunkt in der Ebene ziehen kann, verschiedene Winkel.

Fällt man von dem Punkte B auf die Ebene E das Lot BC und verbindet seinen Fußpunkt C mit dem Durchschnittspunkte A durch die Linie AC, dann ist $\sphericalangle BAC$ der kleinste von allen Winkeln, welche AB mit den Linien in der Ebene E bilden kann. Man nennt diesen Winkel den **Neigungswinkel** der Linie AB gegen die Ebene E. Der Neigungswinkel muß also stets ein spitzer Winkel sein. Die Linie AC nennt man die **Projektion** der Linie AB auf die Ebene E.

Fig. 5.



§ 11. **Fällt man von einem Punkte B im Raume auf eine Ebene E das Lot BC, von dem Fußpunkte C desselben aber wieder ein Lot CA auf eine beliebige Linie DF in der Ebene E und verbindet B mit A, so steht auch BA senkrecht auf DF.**

§ 12. **Fällt man von einem Punkte B im Raume ein Lot BA auf eine Linie DF in einer Ebene E und errichtet in dieser Ebene $AC \perp DF$, so ist BAC der Neigungswinkel der Linie BA gegen die Ebene E, d. h. die von B auf E gefällte Senkrechte BC hat ihren Fußpunkt in der Linie AC.**

§ 13. **Lehrsatz:** **Wenn eine Linie a im Raume parallel mit einer in der Ebene E liegenden Geraden b ist, so ist sie auch parallel zur Ebene E selbst.**

Beweis: Man lege durch a und b eine Ebene; da alle Punkte von a in dieser Ebene liegen, so müßte, wenn die Linie a die Ebene E schneiden würde, dies notwendig in der Durchschnittslinie b beider Ebenen geschehen. Da aber a parallel mit b ist, so ist dies nicht möglich, es muß also a parallel zur Ebene E sein.

§ 14. **Lehrsatz:** Wenn eine Linie a mit einer Ebene E parallel ist, und man durch a eine Ebene legt, welche die Ebene E schneidet, so ist die Durchschnittslinie parallel zu a.

Beweis: Beide Linien liegen in derselben Ebene und können sich nicht schneiden, weil der Durchschnittspunkt in E liegen müßte; nun ist aber a parallel zu E, folglich muß die Durchschnittslinie parallel zu a sein.

§ 15. **Lehrsatz:** Wenn eine von mehreren parallelen Linien zu einer Ebene E parallel ist, so sind auch die andern Linien parallel zur Ebene E, falls sie nicht in dieser Ebene liegen.

Beweis: Zum Beweise lege man durch die eine Linie z. B. a eine Ebene, welche die Ebene E schneidet. Die Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen ist dann parallel zur Linie a, also auch parallel mit den anderen gegebenen Linien. Daraus folgt also, daß diese Linien auch parallel zur Ebene E sein müssen (§ 13).

§ 16. **Lehrsatz:** Wenn eine Ebene die eine von beliebig vielen parallelen Linien schneidet, so schneidet sie auch, wenn man sie nur gehörig erweitert, alle übrigen parallelen Linien.

Der Beweis ist indirekt nach dem vorigen Satze leicht zu führen.

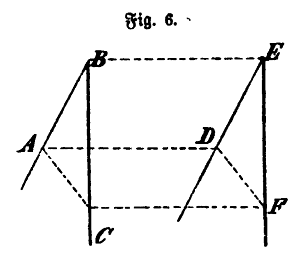
§ 17. **Lehrsatz:** Wenn zwei Winkel im Raume parallele Schenkel haben, so sind sie einander gleich, oder sie ergänzen sich zu $2R$. Sie sind einander gleich, wenn beide Paare paralleler Schenkel gleichgerichtet-parallel oder wenn beide Paare entgegengesetzt gerichtet-parallel sind. Sie ergänzen sich aber zu $2R$, wenn das eine Paar gleichgerichtet-parallel, das andere aber entgegengesetzt gerichtet-parallel ist.

Voraussetzung: $BA \parallel ED$, $BC \parallel EF$.

Behauptung: $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$.

Beweis: Auf den parallelen Schenkeln schneide man sich gleich große Stücke ab z. B. $BA = ED$; $BC = EF$ und ziehe BE, AD, CF, AC und DF. Es entstehen dann die Parallelogramme $ABED$ und $CBEF$, in denen also AD gleich und parallel CF ist. Daraus folgt nun wieder, daß $ADFC$ ein Parallelogramm, also $AC = DF$ ist. In den Dreiecken ABC und DEF ist nun aber $AB = DE$; $BC = EF$ und $AC = DF$; die Dreiecke stimmen also in allen drei Seiten überein, sind mithin kongruent. Da nun in kongruenten Dreiecken gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen, so muß also $\sphericalangle ABC = \sphericalangle DEF$ sein. W z. b. w.

Fig. 6.



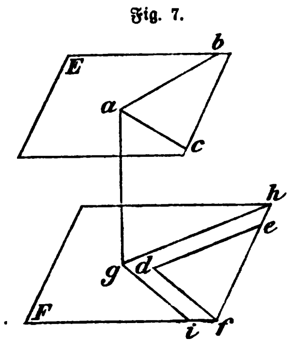
Lehrsatz: Zwei Ebenen sind parallel, wenn in ihnen zwei Winkel liegen, deren Schenkel paarweise parallel sind.

Beweis: In den beiden Ebenen E und F liegen die beiden Winkel bac und edf, deren Schenkel parallel und gleich gerichtet sind. Fällt man von a das Lot ag auf die Ebene F und zieht parallel zu de und df die Linien hg und gi, so ist

$$gh \parallel ab \text{ und } gi \parallel ac,$$

folglich ist $ag \perp ab$ und auf ac, d. h. senkrecht auf der Ebene E. Es ist also $E \parallel F$.

Fig. 7.



§ 18. **Lehrsatz:** Wenn die eine von mehreren parallelen Linien auf einer Ebene senkrecht steht, so stehen auch alle anderen auf dieser Ebene senkrecht.

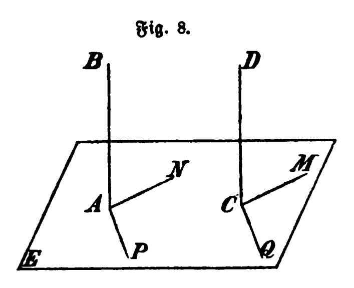
Voraussetzung: $AB \parallel CD$ und $AB \perp E$.

Behauptung: $CD \perp E$.

Beweis: In der Ebene E ziehe man durch die Punkte A und C die einander parallelen Linien AP und CQ. Dann ist

$\sphericalangle BAP = \sphericalangle DCQ$ (nach § 17), und da nach der Voraussetzung $BAP = R$ ist, so ist auch $DCQ = R$ d. h. $DC \perp CQ$. Ziehe ich noch zwei andere parallele Linien AN und CM durch A und C, so läßt sich auf genau dieselbe Weise zeigen, daß $CD \perp CM$ steht. Wenn aber eine Linie auf zwei in einer Ebene liegenden und sich schneidenden Geraden senkrecht steht, so steht sie auf der Ebene selbst senkrecht, folglich steht $CD \perp E$.

Fig. 8.



§ 19. **Lehrsatz** (Umkehrung): Wenn mehrere Linien auf ein und derselben Ebene senkrecht stehen, so sind sie alle einander parallel.

Voraussetzung: Die Linien a, b, c u. s. w. stehen senkrecht auf der Ebene E.

Behauptung: $a \parallel b \parallel c$ u. s. w.

Beweis (indirekt): Angenommen es sei a nicht parallel zu b, so könnte ich durch den Fußpunkt von a eine Parallele zu b ziehen, so müßte diese nach dem vorigen Satze senkrecht auf E stehen. Wir hätten also nun in demselben Punkte zwei Lote auf der Ebene E, was nach dem früheren Satze unmöglich ist. Unsere Annahme muß also falsch sein, d. h. es muß $a \parallel b$ sein; was nun von diesen beiden Linien gilt, gilt auch von den andern. W. z. b. w.

§ 20. **Lehrsatz:** Parallele Linien schneiden dieselbe Ebene unter gleichen Neigungswinkeln.

Um dies zu beweisen konstruiere man für jede der Linien ihren Neigungswinkel; es entstehen dann lauter rechtwinklige Dreiecke, in welchen die zu den Neigungswinkeln gehörigen Komplementwinkel sämtlich gleich sind, es müssen also die Neigungswinkel selbst einander gleich sein.

§ 21. **Lehrsatz:** Wenn eine Linie parallel zu einer Ebene ist, so haben alle ihre Punkte gleichen Abstand von der Ebene.

Beweis: Fällt man von zwei beliebigen Punkten der Linie Lote auf die Ebene und verbindet ihre Fußpunkte durch eine ge-

rade Linie, so entsteht ein Rechteck, dessen gegenüberliegende Seiten also gleich sind. Da dieses die beiden Abstände sind, so ist also der Satz bewiesen.

§ 22. **Lehrsatz:** Sind zwei Punkte einer Linie von einer Ebene gleich weit entfernt und liegen sie auf derselben Seite dieser Ebene, so ist die Linie parallel zur Ebene.

Fällt man von zwei Punkten der Linie die Abstände bis zur Ebene, setzt diese als gleich voraus und verbindet ihre Fußpunkte durch eine gerade Linie, so ist die entstehende Figur ein Rechteck, in welchem also die andern beiden Seiten parallel sind. Folglich ist die Linie parallel zur Ebene.

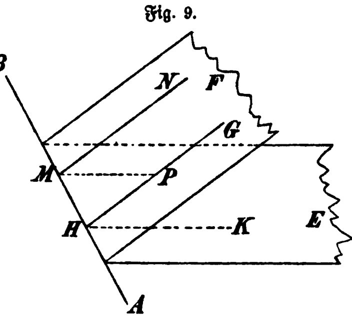
§ 23. Zieht man von einem Punkte außerhalb einer Ebene Linien nach den verschiedenen Punkten der Ebene, so ist das Lot die kürzeste aller dieser Linien, und sie werden um so länger, je weiter die Fußpunkte der Linien vom Fußpunkt des Lotes entfernt sind. Was ferner die Neigungswinkel der Linien gegen die Ebene betrifft, so sind diese um so größer, je näher der Fußpunkt der Linien dem Fußpunkt des Lotes ist, sie sind um so kleiner, je weiter der Fußpunkt der Linien vom Fußpunkt des Lotes entfernt ist. Die Neigungswinkel sind aber alle gleich, wenn die Fußpunkte der Linien von dem des Lotes gleich weit entfernt sind. In diesem Falle liegen die Fußpunkte der Linien sämtlich auf einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt des Lotes ist.

B. Mehrere Ebenen und Linien.

§ 24. Erklärung: Wenn zwei Ebenen E und F sich in einer Durchschnittslinie AB schneiden ohne über diese Linie hinaus verlängert zu sein, so teilen sie den Raum in zwei Teile, von denen jeder ein Flächenwinkel heißt. Die Ebenen E und F heißen die Schenkel des Flächenwinkels, die Linie AB heißt die Scheitelkante des Flächenwinkels oder auch nur Kante. Errichtet man nun in einem Punkte H der Kante AB auf derselben ein Lot in jeder Ebene (HG in F und HK in E), so heißt der Winkel GHK der Neigungswinkel der beiden Ebenen F und E gegen einander.

Dabei ist es gleichgültig wo der Punkt H liegt; denn nimmt man M in AB an und errichtet auch hier die beiden Lote MN und MP auf AB, so ist

$$\sphericalangle NMP = \sphericalangle GHK$$



als Winkel mit parallelen und im selben Sinne gerichteten Schenkeln. Es giebt also zu jedem Flächenwinkel nur einen einzigen Neigungswinkel. Unter dem Flächenwinkel zweier Ebenen soll immer der der Konkaven, also der spitze Winkel verstanden werden. Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so sagt man, die Ebenen stehen senkrecht auf einander.

Folgerungen.

§ 25. 1) Die Durchschnittslinie zweier Ebenen steht auf der Ebene des Neigungswinkels beider senkrecht.

2) Zu gleichen Flächenwinkeln gehören gleiche Neigungswinkel.

3) Neben-Flächenwinkel entstehen, wenn die sich schneidenden Ebenen über die Schnittlinie erweitert werden. Zwei solche Nebenflächenwinkel betragen stets zusammen $2R$. Ebenso entstehen auch Scheitel- Flächenwinkel. Je zwei Scheitel-Flächenwinkel sind einander gleich.

4) Schneiden sich beliebig viele Ebenen in einer geraden Linie, so ist die Summe aller Flächenwinkel um diese Linie herum gleich 4 rechten Flächenwinkeln. Die Summe ihrer Neigungswinkel beträgt ebenfalls $4R$; denn schneidet man die Linie durch eine Ebene senkrecht, so entstehen die Neigungswinkel, die dann als Winkel in der Ebene um einen Punkt herum zusammen $4R$ betragen.

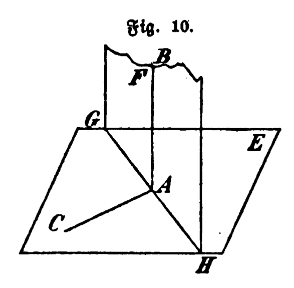
§ 26. **Lehrsatz:** Zwei Ebenen stehen senkrecht auf einander, wenn die eine durch eine Linie geht, welche auf der andern senkrecht steht, oder wenn sie mit einer solchen Linie parallel ist.

Voraussetzung: $AB \perp E$ und Ebene F geht durch AB.

Behauptung: $F \perp E$.

Beweis: Im Punkte A der Ebene E errichte ich in dieser eine Senkrechte AC auf der Durchschnittslinie GH beider Ebenen. Dann steht nach der Voraussetzung AB auf GH und auf AC senkrecht. Es ist also der Winkel $BAC = R$. Da nun dieser Winkel zugleich Neigungswinkel beider Ebenen ist, so stehen also die Ebenen F und E senkrecht auf einander.

Fig. 10.



Würde aber die Ebene F nicht durch AB gehen, sondern wäre sie parallel zu AB, so könnte man durch AB eine Ebene legen, welche die Ebene F in einer Linie schneidet. Dann ist diese Durchschnittslinie parallel zu AB, steht also senkrecht auf E. Es muß also auch die Ebene F nach dem ersten Teil dieses Lehrsatzes senkrecht auf E stehen.

Zusatz: Zwei sich schneidende Ebenen stehen also auf der Ebene ihres Neigungswinkels senkrecht.

§ 27. **Lehrsatz:** 1) Wenn sich zwei Ebenen senkrecht schneiden, und in der einen Ebene eine Linie liegt, welche auf der Durchschnittslinie beider Ebenen senkrecht steht, so steht sie auch auf der anderen Ebene senkrecht.

Da nämlich die Linie auf der Durchschnittslinie beider Ebenen und auf der Linie, mit welcher sie den Neigungswinkel beider Ebenen bildet, senkrecht steht, so muß sie auch auf der andern Ebene senkrecht stehen.

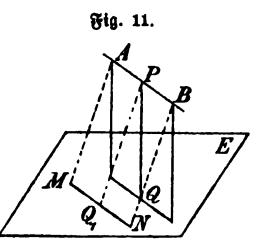
2) Stehen zwei Ebenen senkrecht auf einander, und errichtet man in einem Punkte der Durchschnittslinie ein Lot auf der einen Ebene, so ist dies auch ein Lot auf der anderen Ebene.

Der Beweis läßt sich leicht indirekt mit Hilfe von Nr. 1 führen.

3) Durch eine Linie AB, welche auf einer Ebene E nicht senkrecht steht, kann man stets eine Ebene legen, die senkrecht auf E steht; es giebt jedoch nur eine einzige solche Ebene.

Beweis: Von einem beliebigen Punkte P der Linie AB fälle man das Lot PQ auf E, dann kann ich durch AB und PQ eine Ebene legen, die senkrecht auf E steht. Angenommen nun es gäbe noch eine zweite Ebene, die senkrecht auf E wäre, z. B. $AMNB$, so müßte das von P auf MN gefällte Lot PQ_1, (nach Nr. 1) senkrecht auf E stehen. Es wären also von P auf E zwei Lote gefällt, was nach dem früheren Satze unmöglich ist.

Fig. 11.



Daraus folgt zugleich, daß alle Lote, welche man von allen Punkten einer Linie AB im Raume auf eine Ebene E fällen kann, in einer Ebene liegen; ihre Fußpunkte bilden eine gerade Linie.

§ 28. **Lehrsatz:** Stehen zwei sich schneidende Ebenen auf einer dritten Ebene senkrecht, so steht auch ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht.

Beweis: Um dies zu beweisen errichte man in dem Punkte, in dem die dritte Ebene von der Durchschnittslinie geschnitten wird, eine Senkrechte auf dieser Ebene. Dieses Lot muß dann in jeder der beiden sich schneidenden Ebenen liegen nach dem Satze: Stehen zwei Ebenen auf einander senkrecht und errichtet man in einem Punkte der Durchschnittslinie ein Lot auf einer dieser Ebenen, so liegt dies Lot auch in der anderen Ebene. Das Lot muß also die Durchschnittslinie selbst sein.

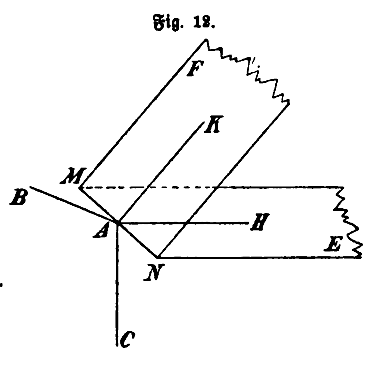
§ 29. **Lehrsatz:** Wenn zwei parallele Ebenen F und G eine dritte Ebene E schneiden und die eine von beiden Ebenen z. B. F senkrecht auf E steht, so steht auch die andere Ebene G senkrecht auf E.

Beweis: Da die beiden Ebenen F und E auf einander senkrecht stehen, so kann ich in einem Punkte der Durchschnittslinie eine Senkrechte zu F errichten, die dann auch in E liegt, und umgekehrt eine Senkrechte auf E errichten, die in F liegt. Da nun die zuletzt genannte Senkrechte mit der Ebene G parallel ist, so muß auch $G \perp E$ sein.

§ 30. **Lehrsatz:** Errichtet man in einem Punkte der Durchschnittslinie zweier Ebenen E und F ein Lot auf

jeder Ebene, so ist der Winkel, den beide Lote mit einander bilden, gleich dem Neigungswinkel beider Ebenen oder er ist das Supplement zum Neigungswinkel. Als Neigungswinkel gilt gewöhnlich der spitze der beiden gebildeten Winkel.

Fig. 12.



Beweis: Es sei $AB \perp F$ und $AC \perp E$, dann wird behauptet, daß

$$BAC + KAH = 2R.$$

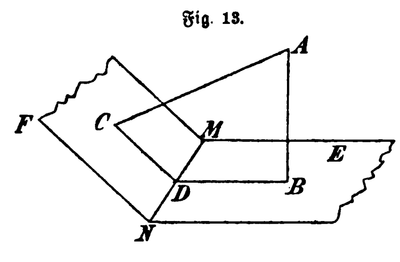
Man errichte in F die Linie $AK \perp MN$ und in E die Linie $AH \perp MN$, dann ist KAH der Neigungswinkel beider Ebenen. Da nun aber AB, AC, AK und AH in einer Ebene liegen und da die Winkel BAK und CAH rechte Winkel sind, so ist

$$BAC + KAH = 2R.$$

§ 31. **Lehrsatz:** Fällt man von einem Punkte A innerhalb zweier sich schneidenden Ebenen ein Lot auf jede der beiden Ebenen, so ist der Winkel, den beide Lote mit einander bilden, das Supplement zum Neigungswinkel.

Beweis: Es sei $AB \perp E$ und $AC \perp F$ und man lege durch AB und AC eine Ebene, so schneidet diese E und F resp. in den Linien BD und CD, und in dem Viereck $ABCD$ ist

Fig. 13.



$$BAC + BDC = 2R,$$

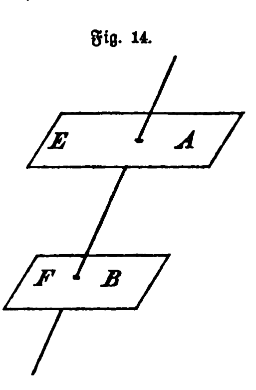
da ABD und ACD nach der Konstruktion Rechte sind. Es bleibt also nur noch übrig zu beweisen, daß BDC der Neigungswinkel beider Ebenen E und F ist. Da die Ebene $ABCD$ auf E und F senkrecht steht als Ebene, die durch das Lot AB und auch durch AC gelegt ist, so muß auch sowohl E als F auf $ABCD$ senkrecht stehen, also ist auch $MN \perp ABCD$. Es steht also BD und CD senk-

recht auf MN und es ist also $\sphericalangle CDB$ der Neigungswinkel beider Ebenen.

§ 32. **Lehrsatz:** Wenn eine Linie auf zwei Ebenen senkrecht steht, so sind diese Ebenen parallel.

Beweis: Die Linie möge die Ebenen E und F in A und B schneiden. Angenommen nun die Ebenen E und F wären nicht parallel, so würden die Ebenen sich in einer geraden Linie schneiden und man könnte einen Punkt C dieser Durchschnittslinie mit A und B verbinden. Das entstehende Dreieck ABC würde dann aber zwei rechte Winkel haben, nämlich bei A und B, was aber unmöglich ist; deshalb muß auch unsere Annahme falsch sein, es muß also die Ebene E parallel F sein.

Fig. 14.



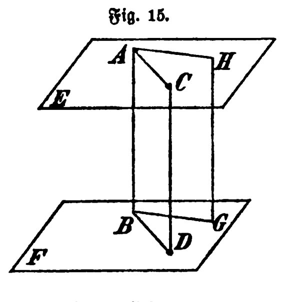
§ 33. **Lehrsatz:** Schneidet eine Linie zwei parallele Ebenen und steht dabei auf einer der beiden Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der anderen Ebene senkrecht.

Voraussetzung: Es sei die Ebene $E \parallel F$ und die Linie $AB \perp E$.

Behauptung: $AB \perp F$.

Beweis: Man lege durch AB eine Ebene $ABCD$, so entstehen die beiden parallelen Durchschnittslinien AC und BD; aus der Voraussetzung folgt nun, daß $AB \perp AC$ ist, es muß also auch $AB \perp BD$ sein. Man lege nun noch eine zweite Ebene durch AB, dann entstehen die parallelen Durchschnittslinien AH und BG, und AB steht senkrecht auf AH, folglich auch senkrecht auf BG. Es steht also AB senkrecht auf BD und BG, also senkrecht auf der Ebene F, w. z. b. w.

Fig. 15.



§ 34. **Lehrsätze:** 1) Wenn zwei sich schneidende Linien in der einen E von zwei Ebenen E und F parallel mit

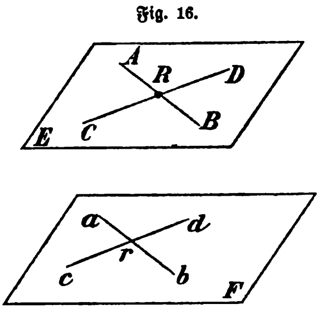
zwei sich schneidenden Linien in der anderen Ebene F sind, so sind beide Ebenen parallel (Fig. 16).

Voraussetzung: $AB \parallel ab$; $CD \parallel cd$.

Behauptung: $E \parallel F$.

Beweis: Da $AB \parallel ab, CD \parallel cd$ ist, so ist auch $\sphericalangle ARD = ard$ und $ARC = arc$ als Winkel mit parallelen und in gleichem Sinne gerichteten Schenkeln. Da aber die Ebenen solcher Winkel parallel sind, so muß $E \parallel F$ sein.

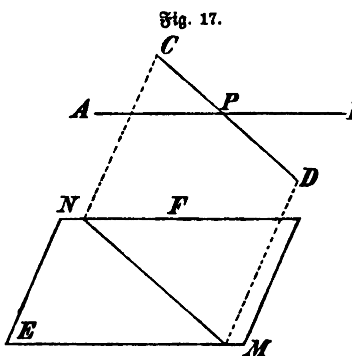
Fig. 16.



Folgerungen: 1) Durch einen Punkt P im Raume läßt sich zu einer Ebene E nur eine parallele Ebene legen.

Beweis: Angenommen es gäbe durch P zwei Ebenen F und G, die parallel zu E wären, dann könnte man durch P eine Ebene H legen, welche E schneidet. Es würden dann drei Durchschnittslinien mit den drei Ebenen E, F und G entstehen, die mit e, f, g bezeichnet werden mögen, und es müßte $e \parallel f$ und $e \parallel g$ sein, woraus dann $f \parallel g$ sich ergiebt. Da aber f und g sich im Punkte P schneiden, so kann f nicht parallel g sein, es muß also unsere Annahme falsch sein, d. h. es kann nur eine durch P gelegte parallele Ebene zu E geben.

Fig. 17.



2) Wenn eine Ebene E parallel zu zwei sich schneidenden Linien ist, so ist sie mit der Ebene parallel, in welcher diese Linien liegen.

Zum Beweise lege man durch jede der beiden Linien AB und CD eine Ebene, welche die Ebene E in zwei Linien schneidet, die parallel zu AB und CD sind, dann müssen nach dem früheren Lehrsatz (§ 34) die beiden Ebenen E und die, welche AB und CD enthält, parallel sein.

3) **Durch eine Linie** AB**, die parallel zu** E **ist, kann man stets nur eine einzige parallele Ebene legen.** (Fig. 17.)

Beweis: Man schneide die Linie AB in einem beliebigen Punkte P durch eine Ebene F, welche die Ebene E in NM schneidet. Dann ziehe man durch P in der Ebene F eine Parallele zu MN, nämlich CD, und lege durch AB und CD eine Ebene, die dann nach dem vorigen Satze parallel zur Ebene E ist. Aus der Folgerung 1) ergiebt sich dann sofort, daß es nur eine einzige Ebene durch AB geben kann, die parallel zu E ist.

4) **Legt man durch einen Punkt** P **im Raume mit einer Ebene** E **eine parallele Linie** AB**, und eine zu** E **parallele Ebene** F**, so fällt** AB **in die Ebene** F**.**

Beweis: Angenommen AB fiele nicht in die Ebene F, dann könnte man durch AB eine Ebene parallel zu E legen; wir hätten dann durch P und AB zwei Ebenen parallel zu E, was nach der Folgerung 3) und 1) nicht möglich ist; es muß also AB in der Ebene F liegen, w. z. b. w.

5) **Sind zwei Ebenen** E **und** F **derselben dritten Ebene** G **parallel, so sind auch** E **und** F **einander parallel.**

6) **Eine Ebene, welche eine von zwei parallelen Ebenen schneidet, schneidet gehörig erweitert auch die andere.**

7) **Eine Ebene, welche eine Linie schneidet, schneidet gehörig erweitert auch jede mit dieser Linie parallele Ebene** F**.**

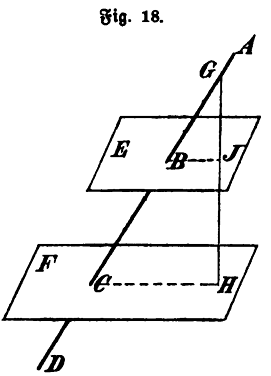
8) **Eine Linie, welche eine von zwei parallelen Ebenen schneidet, schneidet gehörig verlängert auch die andere.**

9) **Ist eine Linie parallel zu einer von zwei parallelen Ebenen, so ist sie auch parallel mit der anderen Ebene.**

10) **Ist eine Linie** AB **mit zwei sich schneidenden Ebenen** E **und** F **parallel, so ist sie auch parallel mit der Durchschnittslinie** MN **dieser Ebenen.**

Beweis: Legt man durch die Linie AB und durch einen Punkt P der Linie MN eine Ebene G, so schneidet G die Ebenen E und F in Linien, die parallel zu AB sind, nach dem Satze: „Ist eine Linie AB parallel zu einer Ebene E und legt man durch AB eine Ebene, welche E schneidet, so ist die Durchschnittslinie parallel zu AB". Da nun aber beide Durchschnittslinien durch P gehen, so müssen sie in eine einzige zusammenfallen, und da nur eine einzige Linie beiden Ebenen E und F angehören kann, so muß diese Linie die Durchschnittslinie MN der Ebenen E und F sein.

Fig. 18.



11) **Parallele Ebenen werden von einer geraden Linie unter gleichen Neigungswinkeln geschnitten.**

Beweis: Fällt man von einem beliebigen Punkte G dieser Linie ein Lot auf die Ebene E, so steht es verlängert auch auf der Ebene F senkrecht. Die Neigungswinkel ABJ und GCH sind gleich als Gegenwinkel an den Parallelen BJ und CH geschnitten von AD.

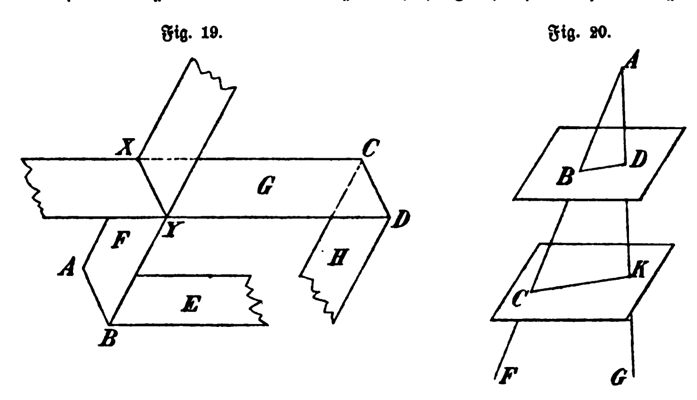
12) Parallele Linien zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich. Stehen diese Linien auf beiden Ebenen senkrecht, so wird jede derselben die *Entfernung* der Ebenen von einander genannt. Es folgt daraus der Satz: **Parallele Ebenen sind stets gleich weit von einander entfernt.**

Beweis: Legt man durch zwei der parallelen Linien eine Ebene, so entsteht im ersten Falle ein Parallelogramm, in dem also die gegenüberliegenden Seiten gleich sind, im zweiten Falle entsteht ein Rechteck.

13) **Unter allen Linien, deren Endpunkte in zwei parallelen Ebenen liegen, ist die auf beiden Ebenen senkrechte die kürzeste Linie.**

14) **Sind zwei sich schneidende Ebenen E und F zweien anderen sich schneidenden Ebenen G und H parallel, so sind die Durchschnittslinien einander parallel.**

Beweis: Ist die Ebene $E \parallel G$ und $F \parallel H$, so kann nicht $F \parallel G$ sein; man verlängere sie, bis sie sich in XY schneiden. Dann ist $XY \parallel AB$ und $XY \parallel CD$, folglich ist auch $AB \parallel CD$.



§ 36. **Lehrsatz:** Parallele Ebenen schneiden von den Schenkeln eines Winkels proportionale Stücke ab.

Beweis: Man lege durch die Linien AF und AG eine Ebene, welche die parallelen Ebenen in den parallelen Linien BD und CK schneidet; parallele Linien schneiden von den Schenkeln eines Winkels proportionale Stücke ab, folglich verhält sich

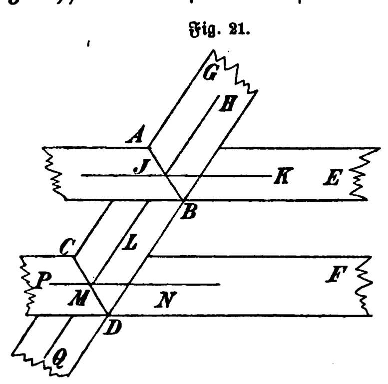
$$AB : BC = AD : DK,$$ w. z. b. w.

§ 37. **Lehrsatz:** Wenn zwei parallele Ebenen E und F von einer dritten Ebene G geschnitten werden, so entstehen an jeder der beiden parallelen Durchschnittslinien AB und CD vier Flächenwinkel; auch hier unterscheidet man Gegen-Flächenwinkel, Wechsel-Flächenwinkel, entgegengesetzte Flächenwinkel. Es gelten dabei die Sätze: Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten durchschnitten werden, so sind je zwei Gegen-Flächenwinkel, oder je zwei Wechsel-Flächenwinkel gleich und je zwei entgegengesetzte Flächenwinkel betragen zusammen zwei Rechte.

Beweis: Um dies zu beweisen, durchschneide man die drei Ebenen durch eine vierte Ebene, die auf den Durchschnittslinien AB und CD senkrecht steht. Es entstehen so die Neigungswinkel HJK und LMN. Dies sind zwei Gegen-Flächenwinkel, und da

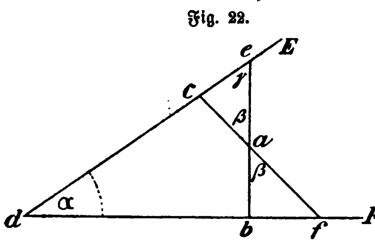
sie parallele und gleichgerichtete Schenkel haben, so sind sie einander gleich; oder da sie in derselben Ebene liegen, so sind sie gleich als Gegenwinkel an den parallelen Linien JK und MN geschnitten von HM. Ebenso läßt sich zeigen, daß die Wechsel-Flächenwinkel z. B. HJK und PMQ u. s. w. einander gleich sind als ebene Wechselwinkel.

Fig. 21.



§ 38. **Lehrsatz:** Errichtet man in der Neigungsebene zweier sich schneidenden Ebenen auf jedem Schenkel des Neigungswinkels ein Lot, so ist der Winkel, den diese beiden Lote mit einander bilden, gleich dem Neigungswinkel der beiden Ebenen.

Fig. 22.



Voraussetzung:

$cf \perp E$; $be \perp F$.

Behauptung: $\alpha = \beta$.

Beweis: In dem rechtwinkligen Dreieck bde ist:

$$\alpha + \gamma = 1R,$$

in dem rechtwinkligen Dreieck ace ist $\beta + \gamma = 1R.$

$$\alpha + \gamma = \beta + \gamma$$
$$\alpha = \beta.$$

§ 39. **Lehrsatz:** Steht eine in einer Ebene E gezogene gerade Linie AB auf einer in derselben Ebene liegenden geraden Linie GH und zugleich auch auf einer gegen die Ebene E schief gerichteten Geraden CG im Schnittpunkte G senkrecht, so muß das aus irgend einem Punkte C der letzteren auf die Linie GH gefällte Lot auf der Ebene senkrecht stehen und es ist also GH die Projektion von CG.

Voraussetzung: $AB \perp GH$ und $AB \perp CG$.

Behauptung: $CH \perp E$.

Beweis: Angenommen CH stände nicht auf der Ebene E senkrecht, so könnte man das Lot CD auf diese Ebene fällen, und G mit D verbinden.

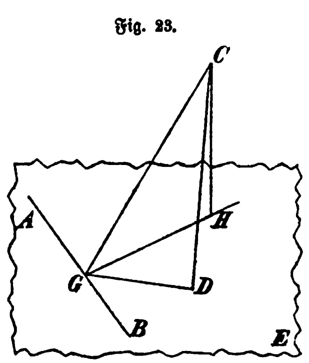


Fig. 23.

Nach der Voraussetzung ist $CG \perp AB$ und DG die Projektion von CG, folglich ist $DG \perp AB$. Nach der Voraussetzung ist aber $GH \perp AB$. Wir hätten also im Punkte G auf der Geraden AB zwei Lote errichtet, was unmöglich ist. Es muß also unsere Annahme, daß CH nicht senkrecht auf der Ebene E steht, falsch sein, es muß also $CH \perp E$ sein.

§ 40. **Lehrsatz:** Von allen Winkeln CGH, CGD, CGE u. s. w., welche eine gegen eine Ebene X schief gerichtete gerade Linie CG mit den aus ihrem Durchschnittspunkt G mit dieser Ebene in dieser letzteren gezogenen geraden Linien CH, GD, GE u. s. w. bildet, ist der Winkel CGH, welchen diese Linie CG mit ihrer Projektion einschließt, der kleinste, und sein Nebenwinkel CGJ der größte. Von den übrigen Winkeln ist immer derjenige größer, dessen Projektion in der Ebene X größer ist, nämlich $CGF > CGE$.

Man kann ferner, wenn diese Linie CG mit irgend einer, auf der einen Seite der Projektion GH, in dieser Ebene liegenden geraden Linie GD irgend einen Winkel CGD bildet, auf der anderen Seite der Projektion in der Ebene eine gerade Linie GE ziehen, mit welcher sie einen gleich großen Winkel, nämlich $CGE = CGD$, bildet, aber auch nicht mehr als einen einzigen solchen gleichen Winkel.

Zum Beweise fälle man von C das Lot CH; dann ist GH die Projektion von CG auf die Ebene X. Ferner mache man $GD = GH$.

Da nun $CH \perp X$ ist, so ist $CH < CD$ und es ist in den

Dreiecken CGH und CGD, $CH < CD$, $GH = GD$ und $CG = CG$, folglich muß $\sphericalangle CGH < \sphericalangle CGD$ sein. Auf gleiche Weise läßt sich der Beweis für jeden anderen Winkel führen, es ist also CGH der kleinste Winkel. Verlängert man HG und DG nach J und K hin, so ist in der Ebene CJH,

Fig. 24.

$$\sphericalangle CGH + CGJ = 2R,$$

und in der Ebene CKD ist

$$CGD + CGK = 2R.$$

Folglich: $\quad CGH + CGJ = CGD + CGK.$

Nun ist aber: $\quad CGH < CGD$

folglich: $\quad CGJ > CGK.$

Ebenso läßt sich zeigen, daß CGJ größer als jeder der anderen Winkel ist, er ist also überhaupt der größte.

Um nun den dritten Teil des Satzes zu beweisen, sei die Projektion FGH des Winkels CFG größer als die Projektion HGD des Winkels CGD. Man mache $GD = GF$ und ziehe noch HJ, HD, CF und CD.

Dann ist in den Dreiecken DGH und FGH also

$$GD = GF$$
$$GH = GH$$
$$\sphericalangle HGF > HGD$$

folglich $\quad HF > HD$

ebenso: $\quad CF > CD.$

In den Dreiecken CGF und CGD ist also

$$CF > CD$$
$$GF = GD$$
$$CG = CG$$

folglich $\quad \sphericalangle CGF > CGD.$

Dasselbe läßt sich von je zwei anderen Winkeln ebenso beweisen. Der vierte Teil des Satzes läßt sich folgendermaßen beweisen. Es bilde CG mit GD den Winkel CGD, dessen Projektion

HGD sei. In der Ebene X lege man auf der anderen Seite von HG den Winkel $HGE = HGD$ an, mache $GD = GE$ und ziehe HD, HE, CD und CE.

Dann ist in den Dreiecken GHD und GHE

$$GD = GE$$
$$\sphericalangle HGD = HGE$$
$$GH = GH$$

folglich ist $HD = HE$

und also $CD = CE$.

In den beiden Dreiecken CGD und CGE ist also

$$CD = CE$$
$$GD = GE$$
$$CG = CG$$

folglich ist $\sphericalangle CGE = CGD$.

Wäre es möglich an der anderen Seite von GH außer dem. Winkel CGE noch einen anderen Winkel CGF anzutragen, der gleich dem Winkel CGD wäre, so müßte $CGF = CGE$ sein, was nach dem dritten Teil dieses Satzes unmöglich ist; es läßt sich also nur ein einziger Winkel antragen, der gleich CGD ist

Daraus ergeben sich unmittelbar die folgenden Lehrsätze, von denen wir später Gebrauch zu machen haben.

§ 41. **Lehrsätze:** 1) Wenn eine gegen eine Ebene schräg gerichtete gerade Linie mit zweien in derselben durch ihren Fußpunkt gezogenen Linien **gleiche** Winkel einschließt, so liegen dieselben zu verschiedenen Seiten der Projektion (Figur 25).

2) Wenn eine gegen eine Ebene schräg gerichtete Linie mit zwei in derselben durch ihren Fußpunkt gezogene Linien **ungleiche** Winkel einschließt, so können dieselben entweder auf derselben oder auf verschiedenen Seiten der Projektion liegen (Fig. 26).

3) Der Winkel, den eine gegen eine Ebene schräg gerichtete Linie mit einer in derselben durch ihren Fußpunkt gezogenen Linie einschließt, ist zugleich ein spitzer

oder stumpfer Winkel mit dem Winkel, den ihre Projektion mit derselben Geraden bildet. (Fig. 27.)

Fig. 25.

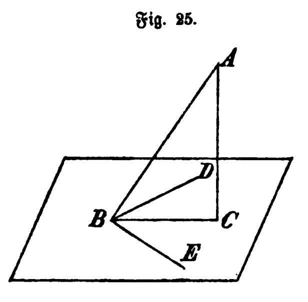
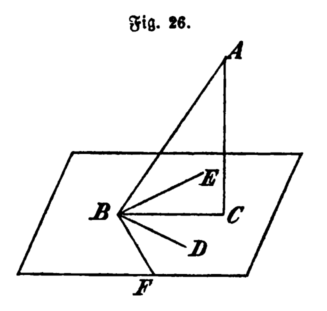


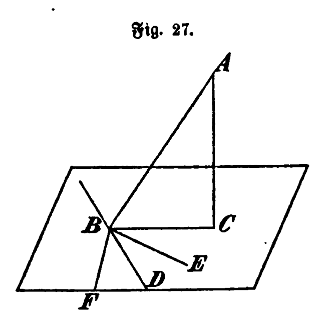
Fig. 26.



Ist $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ABE$, so liegen $\sphericalangle CBE$ und $\sphericalangle CBD$ auf verschiedenen Seiten von BC.

Ist $\begin{cases} ABF > ABD \\ ABF > ABE \end{cases}$ so liegen $\sphericalangle CBF$ und $\sphericalangle CBD$ auf derselben Seite von BC oder $\sphericalangle CBF$ und $\sphericalangle CBE$ zu verschiedenen Seiten von BC.

Fig. 27.



Ist $ABD = 1\,R$, so ist $CBD = 1\,R$,
ist $ABE < 1\,R$, so ist $CBE < 1\,R$,
ist $ABF > 1\,R$, so ist $CBF > 1\,R$.

§ 42. **Lehrsatz:** In jeder dreiseitigen körperlichen Ecke ist stets die Summe zweier Seiten größer als die dritte.

Voraussetzung: $ASB < ASC$
$BSC < ASC$.

Behauptung: $ASB + BSC > ASC$.

Beweis: Ich trage die Seite ASB auf der größeren Seite ASC von AS aus ab; dann muß die Kante SB in die Richtung von SD fallen. Dann mache ich $SD = SB$ und lege durch B und D eine Ebene, welche die anderen Kanten in A und C und die Seiten in AB, BC und AC schneidet. Dann ist $\triangle ASB \cong ASD$, folglich $AD = AB$. In dem Dreieck ABC ist aber $AB + BC > AC$. Da nun $AB = AD$ ist, so muß $BC > DC$ sein. In den beiden Dreiecken BSC und DSC ist aber $SC = SC$; $SB = SD$ nach der Konstruktion, aber

Fig. 28.

$$BC > DC,$$

folglich muß auch der größeren Seite der größere Winkel gegenüberliegen d. h. es muß $BSC > DSC$ sein. Folglich muß auch

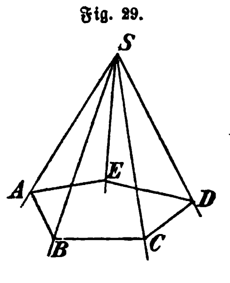
$$ASB + BSC > ASD + DSC$$

sein d. h. $ASB + BSC > ASC$, w. z. b. w.

§ 43. **Lehrsatz:** Die Summe aller Seitenwinkel einer beliebigen körperlichen Ecke ist kleiner als $4R$.

Beweis: Die körperliche Ecke, deren Spitze S sei, habe n Kanten, also auch n Seiten. Durchschneidet man alle Kanten durch eine Ebene z. B. $ABCDE$, so entstehen 1) n Dreiecke, von denen jedes von einer Seite der Durchschnittsfigur und zwei Kanten begrenzt wird. Die Summe aller Winkel in allen diesen Dreiecken ist gleich $n \cdot 2R$; 2) ein n-Eck als Durchschnittsfigur, und die Winkel dieses Durchschnitts betragen zusammen $(2n - 4)R$. 3) An jeder Ecke des Durchschnitts eine dreiseitige körperliche Ecke, also die Ecken bei A, B, C, D, E u. s. w., in welchen die Summe je zweier Seitenwinkel größer als der dritte ist. Es ist also:

Fig. 29.



$$SBA + SBC + SCB + SCD + SDC + SDE + \cdots >$$
$$ABC + BCD + CDE + \cdots$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist aber die Summe der Winkel

an den Grundlinien aller Dreiecke SAB, SBC, SCD u. s. w. Die rechte Seite aber ist die Summe aller Winkel eines Polygons $ABCDE\ldots$ und beträgt $(2n - 4)R$. Bezeichnen wir die Summe aller Dreieckswinkel mit S, die Summe aller Winkel an den Grundlinien mit s, so ist $S = 2 . nR$, und nach obiger Ungleichung $s > (2n - 4)R$. Ziehen wir von der Summe S aller Dreieckswinkel die Summe der Winkel an den Grundlinien s ab, so bleibt die Summe aller Dreieckswinkel am Scheitel der Ecke d. h. die Summe aller Seitenwinkel der körperlichen Ecke. Es ist

$$S = 2n . R$$
$$s > (2n - 4)R$$
$$\overline{S - s < 4R}$$

d. h. die Summe der Seitenwinkel einer körperlichen Ecke ist kleiner als $4R$.

§ 44. **Lehrsatz:** Die Winkel, welche eine vom Scheitel einer dreiseitigen körperlichen Ecke ins Innere derselben gezogene Linie mit zwei Seitenkanten einschließt, sind zusammen kleiner als die Summe der Winkel, welche die dritte Seitenkante mit eben denselben bildet.

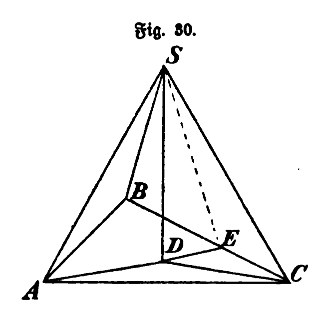


Fig. 30.

Behauptung:

$$ASD + DSC < ASB + BSC.$$

Beweis: Man lege durch die Ecke die Ebene ABC, welche die Linie in D schneidet, lege die Ebene DSC, welche ABC in CD schneidet und die Ebene ASD, welche, über SD erweitert, ABC in der Linie AE und die Ebene BSC in SE schneidet. Dann ist:

$$ASB + BSE > ASE \text{ d. h. } > ASD + DSE$$
und $$DSE + ESC > DSC$$
also $$ASB + BSE + ESC + DSE > ASD + DSC + DSE$$
d. h. $$ASB + BSC > ASD + DSC, \text{ w. z. b. w.}$$

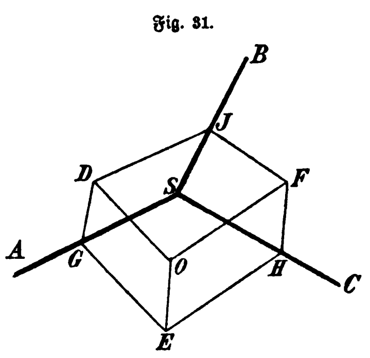
Anmerkung: Dieser Satz entspricht dem geometrischen Satze: Errichtet man über einer geraden Linie als Basis zwei Dreiecke, von

denen das eine das andere einschließt, so ist die Summe der einschließenden Seiten größer als die Summe der eingeschlossenen. Der Beweis dafür ist genau ebenso zu führen wie der obige.

§ 45. **Lehrsatz:** Wenn man von einem Punkte im Innern einer dreiseitigen körperlichen Ecke ein Lot auf jede der Seitenflächen fällt, und durch je zwei derselben eine Ebene legt, so beträgt jeder Seitenwinkel der neu entstandenen Ecke mit dem gegenüberliegenden Neigungswinkel der gegebenen Ecke $2R$ und umgekehrt.

Der Beweis ist unmittelbar zu führen mit Hilfe des Satzes: Fällt man von einem Punkte außerhalb zweier sich schneidenden Ebenen ein Lot auf jede der Ebenen, so schließen diese Lote einen Winkel ein, der sich mit dem Neigungswinkel der beiden Ebenen zu $2R$ ergänzt. Dieser Satz ist früher bewiesen. Durch dreimalige Anwendung dieses Satzes ist der obige bewiesen.

Fig. 31.



Erklärung. Zwei dreiseitige Ecken, bei denen die Seitenwinkel der einen mit den gegenüberliegenden Neigungswinkeln der anderen zusammen $2R$ betragen, heißen Polarecken oder Supplementarecken.

§ 46. **Lehrsatz:** Die Summe sämtlicher Winkel einer dreiseitigen Ecke beträgt mehr als $2R$ und weniger als $6R$. (Fig. 31.)

Beweis:

$$DGE + DOE = 2R$$
$$FHE + EOF = 2R$$
$$DJF + DOF = 2R$$

Folglich:

$$(DGE + FHE + DJF) + (DOE + EOF + DOF) = 6R.$$

Da aber

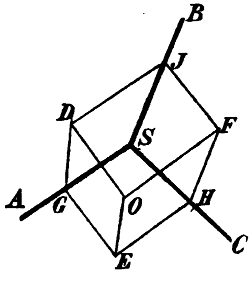
$$(DOE + EOF + DOF) < 4R > 0,$$

ist, so bleibt

$$DGE + FHE + DJF > 2R < 6R.$$

Der Beweis läßt sich auch folgendermaßen führen: Bezeichnen A, B, C die Neigungswinkel an den Kanten SA, SB, SC der Ecke und α, β, γ die Flächenwinkel der Polarecke, so ist

Fig. 32.



$$A + \alpha = 2R$$
$$B + \beta = 2R$$
$$C + \gamma = 2R$$
$$\overline{(A + B + C) + (\alpha + \beta + \gamma) = 6R.}$$

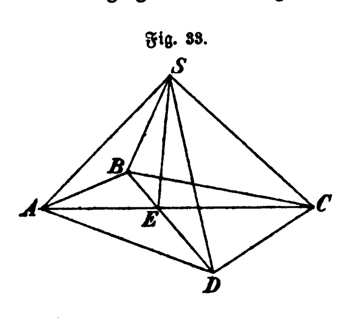
Die Summe der Seitenwinkel einer Ecke ist aber stets $< 4R > 0$, folglich ist

$$(\alpha + \beta + \gamma) < 4R > 0.$$

Folglich $\quad A + B + C > 2R < 6R.$

§ 47. **Lehrsatz:** In jeder vierseitigen Ecke ist die Summe der beiden Diagonalwinkel größer als die Summe der beiden gegenüberliegenden Seitenwinkel.

Fig. 33.



Behauptung:

$$ASC + BSD > ASB + DSC.$$

Beweis: Man durchschneide die Ecke mit einer Ebene, welche sämtliche Kanten trifft; es geschehe dies in A, B, C, D, und lege die Diagonalebenen, so schneidet ASC die Ebene $ABCD$ in AC, BSD dieselbe in BD. Der Durchschnittspunkt von AC und BD sei E; dann ist SE die Durchschnittslinie beider Diagonalebenen. Es ist dann

$$DSE + ESC > DSC$$
$$BSE + ASE > ASB$$

also: $\underbrace{BSE + DSE}_{BSD} + \underbrace{ASE + ESC}_{ASC} > DSC + ASB$

$$BSD + ASC > DSC + ASB$$

w. z. b. w.

II. Abschnitt.

Von den körperlichen Ecken.

§ 1. **Lehrsatz:** **Die Summe zweier Winkel einer dreiseitigen Ecke ist kleiner als $2R$ plus dem dritten Winkel.**

Beweis: Werden die Winkel der Ecke kurz mit A, B, C bezeichnet und die entsprechenden Seiten der Polarecke mit α, β, γ, so ist:

$$\alpha + \beta > \gamma.$$

Folglich ist

$$(180 - A) + (180 - B) > (180 - C),$$
$$360 - (A + B) > (180 - C),$$

addiere beiderseits $(A + B)$, so wird

$$360 > 180 - C + (A + B),$$
$$180 > - C + (A + B),$$

addiere beiderseits C, so folgt

$$180 + C > (A + B)$$

oder

$$A + B < 180 + C$$

oder

$$A + B - C < 180^0.$$

Daraus folgt auch

$$\frac{A + B}{2} - \frac{C}{2} < 90^0,$$

was besonders für sphärische Dreiecke von Wichtigkeit ist.

§ 2. Erklärung: Wenn zwei Ecken sich so ineinander schieben lassen, daß sich ihre Seitenflächen decken, so werden sie kongruent genannt.

Dies ist offenbar der Fall, wenn bei denselben alle Seitenwinkel einzeln verglichen und die gleichgelegenen Neigungswinkel einzeln verglichen gleich sind, und die gleichen Stücke in derselben Ordnung liegen. Liegen aber die gleichen Stücke in entgegengesetzter Ordnung, so lassen sich die Ecken nicht mehr so inein-

ander schieben, daß ihre Begrenzungen zusammenfallen. Sie werden dann symmetrisch genannt.

(Die Handschuhe der beiden Hände sind z. B. symmetrische Körper, ebenso ein Gegenstand und sein Spiegelbild.)

Hierbei kommt es bei der Beurteilung, ob die gleichen Stücke in derselben oder in entgegengesetzter Ordnung liegen, stets auf den Standpunkt an, den man gegen die Raumgebilde einnimmt.

Bei gleichem Standpunkt und gleicher Ordnung sind die Körper kongruent.

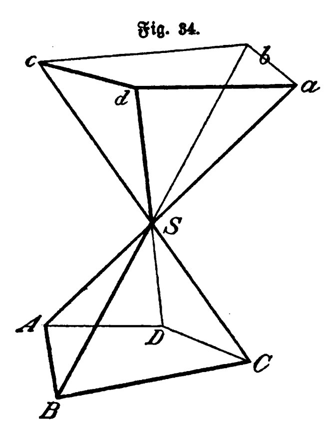
Bei gleichem Standpunkt und entgegengesetzter Ordnung sind die Körper symmetrisch.

Bei entgegengesetztem Standpunkt und gleicher Ordnung sind die Körper symmetrisch.

Bei entgegengesetztem Standpunkt und entgegengesetzter Ordnung sind die Körper kongruent.

§ 3. Erklärung: Scheitelecken sind zwei solche Ecken, welche den Scheitel gemeinsam haben, und bei denen die Kanten der einen Ecke die Verlängerungen der Kanten der anderen sind.

Fig. 34.



Folgerung: Bei Scheitelecken sind die Seitenwinkel der einen Ecke die Scheitelwinkel von den Seitenwinkeln der anderen Ecke und die Neigungswinkel der einen Ecke sind die Scheitelwinkel von den Neigungswinkeln der anderen Ecke.

§ 4. **Lehrsatz:** Scheitelecken sind symmetrisch.

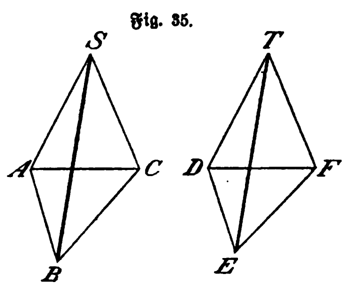
Beweis: Es seien $SABCD$ und $Sabcd$ zwei Scheitelecken, so daß Sa, Sb u. s. w. die Verlängerungen von SA, SB u. s. w. sind. Es sind nun die Seitenwinkel ASB und aSb, BSC und bSc u. s. w. als Scheitelwinkel, und ebenso die Neigungswinkel von ASB zu BSC, und von aSb zu bSc als Scheitelwinkel einander gleich. Man stelle sich nun vor, daß die Kanten SA und SC in der Ebene der Zeichnung, SB aber vor und SD hinter derselben liegen, so werden Sa und Sc ebenfalls in der Zeichnung, Sb aber hinter

und *Sd* vor derselben liegen. Geht man nun so um die Ecke *SABCD* herum, daß die Kanten in der Richtung *SA*, *SB*, *SC*, *SD* sich folgen, so geht man im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers; dasselbe geschieht auch, wenn ich um die Ecke *Sabcd* so herumgehe, daß *Sa*, *Sb*, *Sc*, *Sd* aufeinander folgen. Es liegen dann also bei entgegengesetztem Standpunkte, der bei beiden Ecken stattfindet, da der eine Scheitel nach oben, der andere nach unten liegt, die gleichen Stücke in gleicher Ordnung, die Ecken müssen also symmetrisch sein.

I. Kongruenzsatz.

§ 5. **Lehrsatz:** Wenn in zwei dreiseitigen Ecken zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel einzeln verglichen gleich sind, so sind sie **kongruent** oder **symmetrisch**, je nachdem die gleichen Stücke in derselben oder in entgegengesetzter Ordnung liegen.

Voraussetzung I.: In den Ecken *S* und *T* ist $ASB = DTE$, $BSC = ETF$ und der Neigungswinkel von *ASB* zu $BSC =$ dem von *DFE* zu *ETF*, und diese Stücke mögen in derselben Ordnung liegen.



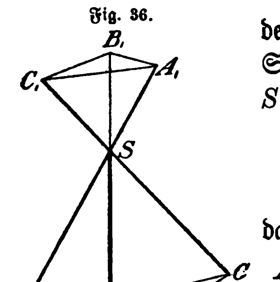
Beweis: Man schiebe die Ecke *TDEF* so in die Ecke *SABC*, daß *DTE* auf *ASB* zu liegen kommt und zwar *TD* auf *AS* und *TE* auf *SB*, das ist möglich, da

$$DTE = ASB$$

nach der Voraussetzung ist. Dann muß die Seite *ETF* in die Seite *BSC* fallen, wegen der Gleichheit der in der Voraussetzung genannten Neigungswinkel, und es muß *TF* auf *SC* fallen, weil $ETF = BSC$ ist. Dann fällt auch die Ebene *DTF* auf *ASC*, weil zwischen zwei sich schneidenden geraden Linien nur eine einzige Ebene möglich ist.

Folgerung: In kongruenten Ecken sind die gleichgelegenen Stücke gleich; folglich ist Seitenwinkel oder Seite $DTF = ASC$ und der Neigungswinkel von *ASB* gegen *ASC* gleich dem von *DTE* gegen *DTF* u. s. w.

Voraussetzung II soll dieselbe bleiben, nur sollen die gleichen Stücke in entgegengesetzter Ordnung liegen.



Beweis: Man konstruiere zu einer der beiden Ecken, etwa zu $SABC$, die Scheitelecke $SA_1B_1C_1$, so ist dieselbe mit $SABC$ symmetrisch. Es ist also

$$A_1SB_1 = ASB = DTE \text{ und}$$
$$B_1SC_1 = BSC = ETF,$$

daher ist

$$A_1SB_1 = DTE \text{ und } B_1SC_1 = ETF.$$

Ferner ist der Neigungswinkel von A_1SB_1 zu B_1SC_1 gleich dem von ASB zu BSC gleich dem von DTE zu ETF. Nun liegen aber die gleichen Stücke an den Ecken $SA_1B_1C_1$ und $TDEF$ mit denen an der Ecke $SABC$ in entgegengesetzter Ordnung, folglich liegen dieselben an den Ecken $SA_1B_1C_1$ und $TDEF$ in derselben Ordnung, daher sind diese Ecken nach dem ersten Teil des Satzes kongruent. Es kann also die Ecke $TDEF$ mit der Ecke $SA_1B_1C_1$ zur Deckung gebracht werden, so daß sie mit derselben eine einzige Ecke bildet, und da $SA_1B_1C_1$ mit $SABC$ symmetrisch ist, so muß auch $TDEF$ mit $SABC$ symmetrisch sein.

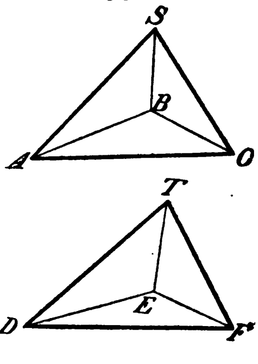
Hieraus folgt sofort, daß die übrigen Stücke beider Ecken entsprechend einander gleich sind.

II. Kongruenzsatz.

§ 6. **Lehrsatz:** Wenn in zwei dreiseitigen körperlichen Ecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel einzeln verglichen gleich sind, so sind sie kongruent oder symmetrisch, je nachdem die Stücke in derselben oder in entgegengesetzter Richtung liegen.

Erster Fall, Voraussetzung: Seite $ASC = DTF$ und der Neigungswinkel von ASB gegen ASC gleich dem von DTE gegen DTF und der Neigungswinkel von BSC gegen ASC gleich dem von ETF gegen DTF und die Stücke liegen in derselben Ordnung.

Fig. 37.



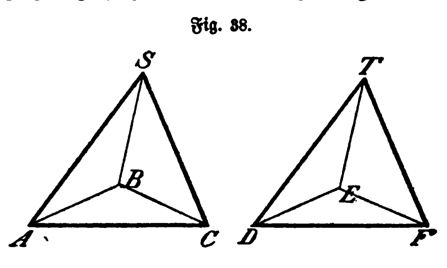
Beweis: Man schiebe die Ecke $TDEF$ so in die Ecke $SABC$, daß die Seite DTF auf die Seite ASC fällt; dies ist möglich, da sie beide nach der Voraussetzung gleich sind; dann muß die Seite DTE in die Seite ASB und ETF in die Seite BSC fallen, weil die in der Voraussetzung genannten Neigungswinkel einzeln verglichen gleich sind. Es muß also auch die Kante TE auf SB fallen, da zwei Ebenen sich nur in einer geraden Linie schneiden können. Hieraus folgt die Gleichheit der übrigen gleichgelegenen Stücke.

Der zweite Fall, wo die gleichen Stücke in entgegengesetzter Ordnung liegen, wird mit Hilfe der Scheitelecken bewiesen.

III. Kongruenzsatz.

§ 7. **Lehrsatz:** Wenn in zwei dreiseitigen körperlichen Ecken alle drei Seiten einzeln verglichen gleich sind, so sind sie kongruent oder symmetrisch, je nachdem die Stücke in derselben oder in entgegengesetzter Ordnung liegen.

Fig. 38.



Erster Fall.

Voraussetzung:
$ASB = DTE$,
$BSC = ETF$,
$ASC = DTF$
und die gleichen Stücke liegen in derselben Ordnung.

Behauptung: Die beiden Ecken sind kongruent.

Beweis: Man schiebe die Ecke $TDEF$ so in die Ecke $SABC$

hinein, daß TD auf SA und TF auf SC zu liegen kommt. Dies ist möglich, weil nach der Voraussetzung $DTF = ASC$ ist. Es fragt sich nun, wohin TE fällt.

1) Es könnte TE in eine der Ebenen BSC oder ASB fallen, dann müßte aber $ETF < BSC$ oder $DTE < ASB$ sein, was gegen die Voraussetzung ist, daher ist dieser Fall unmöglich.

2) TE könnte auch in die Erweiterung einer der beiden Ebenen BSC oder ASB über SB hinaus fallen, dann müßte aber $ETF > BSC$ oder $DTE > ASB$ sein, was ebenfalls gegen die Voraussetzung ist, daher ist auch dieser Fall unmöglich.

3) TE könnte auch so in die Richtung SG fallen, daß die Ecke $TDEF$ die Ecke $SABC$ umschließt, daß mithin SB innerhalb der Ecke $TDEF$ zu liegen kommt. Dann müßte aber

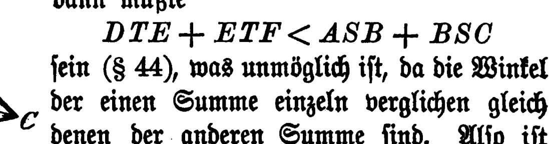
$$DTE + ETF > ASB + BSC$$

sein (nach § 44), was unmöglich ist, da die Winkel der einen Summe, einzeln verglichen, denen der anderen gleich sind. Also ist auch dieser Fall unmöglich.

Fig. 39.



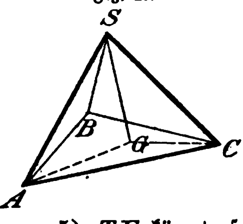
4) TE könnte so in die Richtung SG fallen, daß es innerhalb der Ecke $SABC$ zu liegen kommt; dann müßte



$$DTE + ETF < ASB + BSC$$

sein (§ 44), was unmöglich ist, da die Winkel der einen Summe einzeln verglichen gleich denen der anderen Summe sind. Also ist auch dieser Fall unmöglich.

Fig. 40.



5) TE könnte so in die Richtung SG fallen, daß die Ebene DTE die Ebene BSC oder die Ebene FTE die Ebene ASB durchschneidet. Wäre das erstere der Fall, so könnte man durch SB und SG eine Ebene legen; dann entstände die vierseitige Ecke $SABGC$, in welcher die beiden Diagonalwinkel zusammen größer als die Summe zweier gegenüberliegenden Seitenwinkel sein müßte.

Fig. 41.

Es wäre also:

$$ASG + BSC > ASB + CSG.$$

Nun ist ASG nichts anderes als DTE und CSG nichts anderes als FTE, folglich ist

$$DTE + BSC > ASB + FTE,$$

was unmöglich ist, da $DTE = ASB$ und $BSC = FTE$ ist.

Mithin ist auch dieser Fall undenkbar.

Es bleibt somit nichts weiter übrig, als daß TE in SB fällt, und damit ist die Kongruenz der Ecken bewiesen.

Der zweite Fall, bei welchem die gleichen Stücke in entgegengesetzter Reihenfolge liegen, wird wieder mit Hilfe der Scheitelecken bewiesen.

IV. Kongruenzsatz.

§ 8. **Lehrsatz:** Wenn in zwei dreiseitigen Ecken die drei Neigungswinkel einzeln verglichen gleich sind, so sind die Ecken kongruent oder symmetrisch, je nachdem die gleichen Stücke in derselben oder in entgegengesetzter, Richtung liegen.

Ich konstruiere mir zu jeder der beiden Ecken die Supplementarecke. Dann sind in den Supplementarecken die Seitenwinkel gleich, als Supplemente zu den Neigungswinkeln der gegebenen Ecken. Die beiden Supplementarecken stimmen also in den drei Seitenwinkeln überein, sind also kongruent. Aus dieser Kongruenz folgt dann also, daß auch die Neigungswinkel der Supplementarecken gleich sind. Zu gleichen Neigungswinkeln der Supplementarecken gehören aber gleiche Seitenwinkel der gegebenen Ecken. Die gegebenen Ecken stimmen also in den drei Seitenwinkeln überein, sind also kongruent oder symmetrisch.

§ 9. **Lehrsatz:** In jeder dreiseitigen körperlichen Ecke liegen gleichen Seiten auch gleiche Winkel gegenüber, oder: Wenn in einer dreiseitigen körperlichen Ecke zwei Seitenwinkel gleich sind, so sind auch die Neigungswinkel gleich, welche ihre Ebenen mit der dritten Seitenfläche einschließen.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf den in § 41 (Abschnitt I) angeführten Sätzen.

Voraussetzung: Es ist gegeben die dreiseitige körperliche Ecke *SABC*, in welcher Seite *ASB* = *ASC* ist.

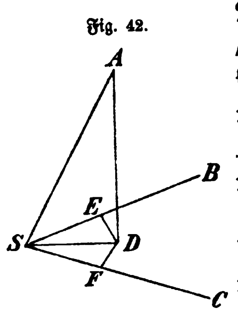
Behauptung: Der Neigungswinkel der Seite *ASB* zu *BSC* ist gleich dem Neigungswinkel der Seite *ASC* zu *BSC*.

Beweis: Wir haben hier drei Fälle zu unterscheiden: die in der Voraussetzung genannten Seitenwinkel sind 1) beide spitze, 2) beide rechte, 3) beide stumpfe Winkel.

Erster Fall.

Man fälle das Lot *AD* und projiziere so *AS* auf die Seite *BSC*, dann muß die Projektion *SD* zwischen *SB* und *SC* liegen (§ 41, 1) und die Winkel *DSC* und *DSB*, welche die Projektion mit den Kanten *SB* und *SC* bildet, müssen spitze sein (§ 41, 3). Daraus folgt, daß die von *D* auf *SB* und *SC* gefällten Lote die Kanten *SB* und *SC* selbst treffen müssen, was in den Punkten *E* und *F* geschehe. Man verbinde jetzt *A* mit *E* und *F*, dann steht $AE \perp SB$ und $AF \perp SC$ nach dem Satze:

Fig. 42.



„Wenn man von einem Punkte außerhalb einer Ebene ein Lot auf dieselbe fällt und von dem Fußpunkte desselben ein Lot auf eine beliebige in dieser Ebene gezogene Linie, den Fußpunkt dieses letzteren mit irgend einem Punkte des ersteren verbindet, so steht diese Verbindungslinie auf der in der Ebene beliebig gezogenen senkrecht." Daher ist *AED* der Neigungswinkel von *ASB* gegen *BSC* und ferner *AFD* der Neigungswinkel von *ASC* gegen *BSC*.

Um nun zu zeigen, daß diese einander gleich sind, betrachte man die beiden Dreiecke *ASF* und *ASE*. In diesen ist

$AS = AS$

$\sphericalangle AES = AFS$ als Rechte

$\sphericalangle ASE = ASF$ nach der Voraussetzung.

Die Dreiecke stimmen also in einer Seite, einem anliegenden und dem gegenüberliegenden Winkel überein, sind also kongruent. Daraus folgt

$$AE = AF.$$

In den rechtwinkligen Dreiecken ADE und ADF ist also

$$AE = AF$$

$$AD = AD,$$

sie stimmen also in den Hypotenusen und in der Kathete AD überein, sind also auch kongruent; es muß also

$$\sphericalangle AED = \sphericalangle AFD$$

sein, w. z. b. w.

Zweiter Fall.

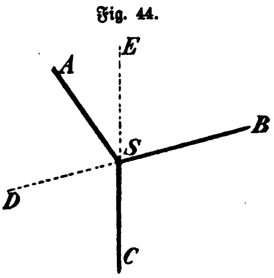
Fig. 43.

Da hier ASB und ASC rechte Winkel sein sollen, so steht AS senkrecht auf der Ebene BSC, folglich stehen auch die Ebenen ASB und ASC senkrecht auf BSC, d. h. der Neigungswinkel von ASB gegen BSC ist ein Rechter, und der Neigungswinkel von ASC gegen BSC ist ebenfalls ein Rechter; da aber alle rechten Winkel einander gleich sind, so ist folglich der Neigungswinkel von ASB gegen BSC gleich dem von ASC gegen BSC, w. z. b. w.

Dritter Fall.

Hier sollen die beiden Winkel ASB und ASC beide stumpf sein und es soll wieder gezeigt werden, daß der Neigungswinkel von ASB gegen BSC gleich dem von ASC gegen BSC ist. Dazu verlängere man BS und CS über S hinaus bis D und E und denke sich die Seitenflächen der Ecke erweitert. Dadurch entsteht die neue Ecke $ASDE$ mit den einander gleichen Seitenwinkeln ASD und ASE und es muß also nach dem ersten Fall der Neigungswinkel von ASE gegen DSE gleich dem Neigungswinkel von ASD gegen DSE sein. Da nun zu gleichen

Fig. 44.



Winkeln auch gleiche Nebenwinkel gehören, so muß auch der Neigungswinkel von ASB gegen BSC gleich dem von ASC gegen BSC sein. W. z. b. w.

§ 10. **Lehrsatz:** In jeder dreiseitigen körperlichen Ecke liegt der größeren von zwei Seiten auch der größere Winkel (Neigungswinkel) gegenüber, oder: Sind in einer dreiseitigen Ecke zwei Seitenwinkel ungleich, so sind die Winkel, welche ihre Ebenen mit der dritten Seitenfläche einschließen, im entgegengesetzten Sinne ungleich.

Um diesen Satz vollständig beweisen zu können, müssen wir drei Hauptfälle unterscheiden:

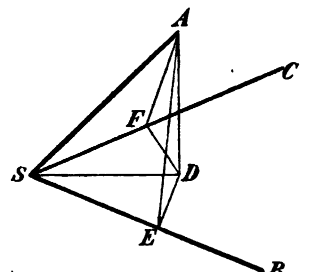
I. Die Summe der beiden ungleichen Seiten ist $< 2R$.
II. „ „ „ „ „ „ „ $= 2R$.
III. „ „ „ „ „ „ „ $> 2R$.

I. Hauptfall.

Da hier die Summe der beiden ungleichen Seiten $< 2R$ sein soll, so sind drei einzelne Fälle möglich, welche dieser Bedingung genügen können. Die Bedingung ist erfüllt, wenn

1) beide Seitenwinkel spitz sind,
2) der kleinere von beiden spitz, der größere $= 1R$ ist,
3) der kleinere von beiden spitz, der größere $> 1R$ ist.

Fig. 45.



Wir wollen jetzt diese drei speziellen Fälle näher betrachten.

Erster Fall.

Voraussetzung: $\sphericalangle ASB < 1R$ und $ASC < 1R$, und zwar

$$ASB > ASC.$$

Behauptung: $AFD > AED$.

Um den Satz zu beweisen, müssen wir uns erst einige Sätze aus der Planimetrie ins Gedächtnis zurückrufen.

1) Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken die Hypotenusen einzeln verglichen gleich sind, der eine spitze Winkel des ersten

Dreiecks größer oder kleiner ist als der entsprechende des zweiten Dreiecks, so ist auch die dem spitzen Winkel des ersten Dreiecks gegenüberliegende Kathete größer oder kleiner als die dem spitzen Winkel des zweiten Dreiecks gegenüberliegende Kathete; diese Katheten sind also in demselben Sinne ungleich wie die spitzen Winkel.

2) Wenn in zwei rechtwinkligen Dreiecken zwei entsprechende Katheten einzeln verglichen gleich sind, die Hypotenuse des ersten Dreiecks aber größer oder kleiner als die des zweiten Dreiecks ist, so sind die den gleichen Katheten gegenüberliegenden Winkel im entgegengesetzten Sinne ungleich wie die Hypotenusen, so daß die des ersten Dreiecks kleiner oder größer als die des zweiten Dreiecks ist.

Beweis: Man projiziere wieder AS durch ein Lot AD auf SBC; die Projektion SD kann nun a) zwischen SB und SC, b) auf SC und c) in die Erweiterung der Ebene BSC über SC hinaus fallen.

a) Es falle SD zwischen SB und SC, dann müssen DSB und DSC spitz sein (§ 41). Die von D auf SB und SC gefällten Lote DE und DF müssen also die Kanten SB und SC selbst in E und F treffen. Verbindet man A mit E und F, so ist also AED der Neigungswinkel der Ebene ASB gegen BSC, und AFD der Neigungswinkel der Ebene ASC gegen BSC. In den beiden rechtwinkligen Dreiecken ASE und ASF ist nun

$$AS = AS$$

$$\sphericalangle ASE > \sphericalangle ASF \text{ nach der Voraussetzung.}$$

Es muß also nach dem ersten der vorher angeführten Sätze

$$AE > AF.$$

sein. Da nun AE und AF die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke AED und AFD sind, welche die Kathete AD gemeinsam haben, so muß nach dem zweiten der angeführten Sätze

$$AED < AFD \text{ oder } AFD > AED.$$

sein. W. z. b. w.

b) Die Projektion von AS falle jetzt in die Kante SC; dies ist nur möglich, wenn der Winkel ASC der Neigungswinkel von

AS gegen die Ebene *BSC* ist. Da nun ∢ *ASB* ein spitzer ist, so muß auch *CSB* ein spitzer sein (§ 41, 3), und ein von *D* auf *SB* gefälltes Lot *DE* muß die Kante *SB* selbst treffen. Verbindet man noch *A* mit *E*, so ist *AED* der Neigungswinkel von *ASB* gegen *BSC* und der Winkel *AED* in dem rechtwinkligen Dreieck *AED* ein spitzer. Da aber die Seite *ASC* auf *BSC* senkrecht steht, so muß der Neigungswinkel von *ASC* zu *BSC* ein rechter sein, nach dem Satze: „Wenn eine gerade Linie auf einer Ebene senkrecht steht, so steht auch jede durch sie gelegte Ebene auf derselben Ebene senkrecht." Es ist ist also der Neigungswinkel der Ebene *ASC* gegen *BSC* > als der der Ebene *ASB* gegen *BSC*.

Fig. 46.

c) Die Projektion von *SA* falle nicht in die Ebene *BSC*, sondern in deren Erweiterung über *SC* hinaus (§ 41, 2).

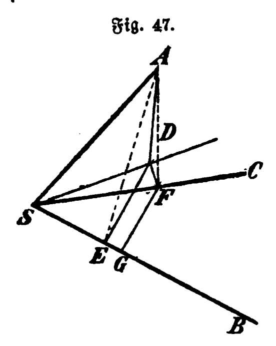


Fig. 47.

Man fälle von *D* aus auf *SB* und *SC* die Lote *DE* und *DF*, so müssen diese resp. *SB* und *SC* treffen, da *DSB* und *DSC* zugleich mit *ASB* und *ASC* spitz sind (§ 41, 3).

Man verbinde nun *A* mit *E* und *F*, so ist *AED* der Neigungswinkel von *ASB* gegen *BSC* und zwar ein spitzer, da *ADE* im Dreieck *ADE* ein rechter ist. Ebenso ist ∢ *AFD* der Neigungswinkel von *ASC* gegen *DSC* und ebenfalls ein spitzer, da *ADF* ein rechter ist. Der Neigungswinkel von *ASC* gegen *BSC*, nämlich *AFG*, ist aber der Nebenwinkel von *AFD*, muß also ein stumpfer sein, folglich ist

$$AFG > AED.$$

W. z. b. w.

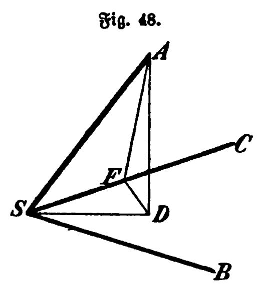
Zweiter Fall.

Der kleinere von den beiden Seitenwinkeln sei $< 1R$, der größere $ASB = 1R$. Projiziert man *SA* auf die Ebene *BSC*,

so kann die Projektion a) zwischen SB und SC, oder b) auf SC, oder c) in die Erweiterung der Ebene BSC über BC hinausfallen.

a) Es falle die Projektion zwischen SB und SC und man fälle von D ein Lot auf SB, das notwendig mit der Projektion SD zusammenfallen muß, da $\sphericalangle DSB$ nach § 41, 3 zugleich mit $\sphericalangle ASB$ ein rechter sein muß. Der Winkel ASD ist der Neigungswinkel von ASB zu BSC, und ein von D auf SC gefälltes Lot muß SC selbst notwendig treffen, da $\sphericalangle DSC$ zugleich mit $\sphericalangle ASC$ spitz sein muß (§ 41, 3). Verbindet man nun A mit F, so ist AFD der Neigungswinkel von ASC gegen BSC. In den beiden rechtwinkligen Dreiecken AFD und ASD ist die Kathete AD gemeinsam, aber die Hypotenuse $AF < AS$, folglich muß

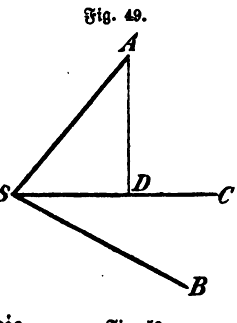
Fig. 48.



$$\sphericalangle AFD > ASD$$

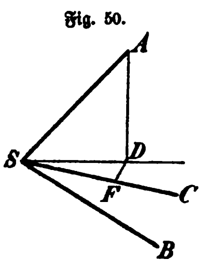
sein, w. z. b. w.

Fig. 49.



b) Fällt die Projektion von SA auf die Kante $SC = SD$, so ist der Neigungswinkel von ASC gegen BSC ein rechter und der Neigungswinkel von ASB gegen BSC, in diesem Falle ASD, ein spitzer; es ist also der erstere Winkel größer als der letztere, w. z. b. w.

Fig. 50.



c) Fällt die Projektion von SA in die Erweiterung der Ebene BSC über SC hinaus, so ist, wie in 1c) der Neigungswinkel von ASC gegen BSC notwendig ein stumpfer, der von ASB gegen BSC, nämlich ASD, ein spitzer. Der erstere ist also wieder größer als der letztere, womit der Satz bewiesen ist.

Dritter Fall.

Der kleinere von den beiden Seitenwinkeln ASC sei $< 1R$, der größere ASB dagegen sei $> 1R$; es soll jedoch ASC

kleiner als der Supplementwinkel ASB' des stumpfen Winkels ASB sein.

Man projiziere wieder SA auf die Ebene BSC, die Projektion SD kann dann fallen a) zwischen SB und SC, b) auf SC oder c) in die Erweiterung von BSC über SC hinaus.

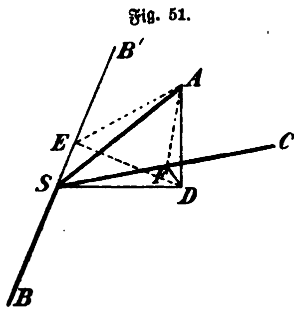


Fig. 51.

a) Es möge SD zwischen SB und SC fallen (§ 41, 2); dann muß $\sphericalangle DSC$ ein spitzer und DSB ein stumpfer sein (§ 41, 3); fällt man von D auf SC ein Lot, so muß dies folglich SC selbst in F treffen, dagegen wird ein von D auf SB gefälltes Lot die Verlängerung SB' von SB in E treffen. Man verbinde nun A mit E und F, so ist $\sphericalangle AFD$ der Neigungswinkel von ASC gegen BSC und $\sphericalangle AED$ der Neigungswinkel von ASB gegen BSC.

In den beiden rechtwinkligen Dreiecken ASE und ASF ist die Hypotenuse AS gemeinsam, $\sphericalangle ASF < ASE$ nach der Voraussetzung und es muß folglich

$$AF < AE$$

sein, nach dem ersten der vorher angeführten planimetrischen Lehrsätze. AF und AE sind aber die Hypotenusen der rechtwinkligen Dreiecke AFD und AED, welche die gemeinschaftliche Kathete AD haben; es muß also nach dem zweiten der angegebenen Lehrsätze

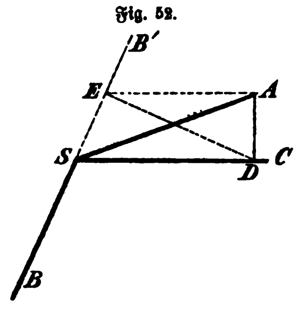


Fig. 52.

$$\sphericalangle AFD > AED$$

sein, w. z. b. w.

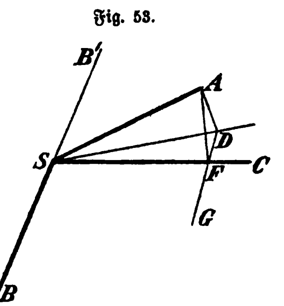
b) Fällt die Projektion SD auf die Kante SC, so ist der Neigungswinkel von ASC gegen BSC wie in 1b) ein rechter, und derjenige von ASB gegen BSC, nämlich AED, ein spitzer. Der erstere ist also wieder größer als der letztere, w. z. b. w.

c) Fällt die Projektion SD aber in die Erweiterung von BSC über SC hinaus, so muß SD zwischen SB' und SC fallen, da $ASC < BSC$ nach der Voraussetzung ist. Es muß folglich auch

$$DSC < B'SD$$

sein. In diesem Falle ist der Neigungswinkel von ASC gegen BSC, nämlich AFG ein stumpfer, während der Neigungswinkel von ASB gegen BSC, nämlich AED ein spitzer ist. Da der erstere größer als der letztere ist, so ist damit der Satz bewiesen.

Fig. 53.



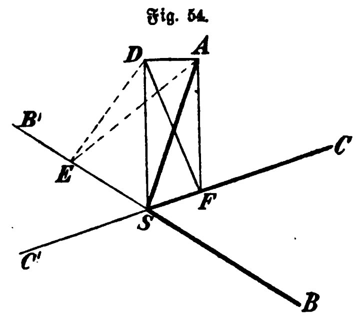
II. Hauptfall.

Voraussetzung: $ASB + ASC = 2R$, und zwar sei

$$ASB > 1R \text{ und } ASC = 2R - ASB = ASB'$$

Beweis: Wir betrachten die Ecke $SAB'C$; bei dieser sind die Seitenwinkel ASC und ASB' nach der Voraussetzung gleich, und es müssen deshalb SB' und SC nach § 41 zu verschiedenen Seiten der Projektion von AS auf $B'SC$, also auch auf verschiedenen Seiten der Projektion SD liegen. Konstruiert man ebenso wie vorher die Neigungswinkel von ASB' gegen $B'SC$ und von ASC gegen $B'SC$ (AED und AFD), so sind diese einander gleich und spitze Winkel. Nun ist der Neigungswinkel von ASB' gegen $B'SC$ zugleich der Neigungswinkel von ASB gegen BSC und der Neigungswinkel von ASC gegen BSC ist Nebenwinkel von AFD, und da dieser spitz war, folglich ein stumpfer. Es ist also der Neigungswinkel von ASC gegen BSC größer als der spitze Winkel AED, d. h. größer als der Neigungswinkel von ASB gegen BSC, w. z. b. w.

Fig. 54.



III. Hauptfall.

Voraussetzung: $ASB + ASC > 2R$.

Beim Beweise dieses Falles sind wieder drei besondere Fälle möglich, nämlich:

1) Der größere von beiden Seitenwinkeln ASB ist stumpf, der kleinere ASC ebenfalls.

2) Der größere von beiden Seitenwinkeln ASB ist stumpf, der kleinere ASC ein Rechter.

3) Der größere von beiden Seitenwinkeln ASB ist stumpf, der kleinere ASC spitz, aber größer als das Supplement von ASB.

Die beiden ersten dieser Fälle lassen sich zusammenfassen (vorige Figur).

Beweis: Ist $\sphericalangle ASC$ ein Rechter oder ist er weniger stumpf als der Winkel ASB, so verlängere man SB über S hinaus bis B', und SC über S hinaus bis C', und denke sich die Seitenflächen der gegebenen Ecke $SABC$ gehörig erweitert, so erhält man die neue Ecke $SAB'C'$, in welcher ASB' als Nebenwinkel von ASB jedenfalls ein spitzer sein muß. Der Winkel ASC' aber wird als Nebenwinkel von ASC entweder ein Rechter sein oder wenigstens ein spitzer, der größer ist als der spitze Winkel ASB'. Die beiden Seitenwinkel ASB' und ASC' der neu entstandenen Ecke $SAB'C'$ betragen also zusammen weniger als zwei Rechte. Es ist also

$$ASB' + ASC' < 2R.$$

Nach dem I. Hauptfall muß also der Neigungswinkel von ASC' zu $B'SC'$ kleiner sein, als der Neigungswinkel von ASB' zu $B'SC'$. Daraus folgt nun, daß ihre Nebenwinkel im entgegengesetzten Sinne ungleich sein müssen, daß also der Neigungswinkel von ASC gegen BSC größer sein muß als der von ASB gegen BSC, w. z. b. w.

Dritter Fall. Ist ASB stumpf und ASC spitz, jedoch größer als das Supplement von ASB, so verlängere man wieder SC und SB über S hinaus bis C' und B', und denke sich wieder die Ebenen der Ecken gehörig erweitert. Dann ist ASC' als Nebenwinkel zu ASC ein stumpfer, und ASB' als Nebenwinkel

zu ASB ein spitzer, der aber der Voraussetzung gemäß kleiner als ASC' d. h. das Supplement von ASC sein muß. Es ist also

$$ASC' + ASB' < 2R.$$

Es ist daher in der Ecke $SAB'C'$ nach dem I. Hauptfall der Neigungswinkel von ASC' gegen $B'SC'$ kleiner als der Neigungswinkel von ASB' gegen $B'SC'$; ihre Supplemente müssen also im entgegengesetzten Sinne ungleich sein, d. h. es muß der Neigungswinkel von ASC gegen BSC größer sein, als der Neigungswinkel von ASB gegen BSC.

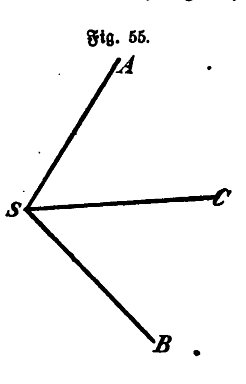
§ 11. **Lehrsatz:** Jn jeder dreiseitigen körperlichen Ecke liegen gleichen Winkeln auch gleiche Seiten gegenüber.

Voraussetzung: Der Neigungswinkel von ASC gegen BSC ist gleich dem Neigungswinkel von ASB gegen BSC.

Behauptung: Seite $ASB = ASC$.

Beweis (indirekt): Angenommen ASB wäre nicht gleich ASC, sondern größer als ASC; dann müßte der größeren Seite auch der größere Winkel gegenüberliegen, es müßte also der Neigungswinkel von ASC gegen BSC größer sein als der von ASB gegen BSC, was gegen unsere Voraussetzung ist. Es kann aber auch nicht $ASB < ASC$ sein, denn sonst müßte der Neigungswinkel von ASC gegen BSC kleiner sein als der von ASB gegen BSC, was wieder gegen die Voraussetzung ist. Es bleibt also nur übrig, daß

Fig. 55.



$$ASB = ASC$$

ist, w. z. b. w.

Der Beweis läßt sich auch direkt mit Hilfe der Polarecken führen.

Da der Neigungswinkel von ASC gegen BSC gleich dem Neigungswinkel von ASB gegen BSC ist, so müssen in der Polarecke die dazu gehörigen Seitenwinkel gleich sein. Gleichen Seiten liegen aber gleiche Winkel gegenüber, es sind also in der Polarecke die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich. Daraus folgt, daß die zu diesen Winkeln gehörigen Seiten der

ursprünglichen Ecke ebenfalls gleich sein müssen, da sie die Supplemente zu den Winkeln der Polarecke sind, w. z. b. w.

§ 12. **Lehrsatz: Die Summe zweier Seiten einer dreiseitigen körperlichen Ecke ist zugleich mit der Summe ihrer Gegenwinkel größer oder kleiner als 2 Rechte oder gleich zwei Rechten.**

Der Beweis dieses Satzes ist eigentlich nur zu führen für den Fall, daß die Seiten ASB und ASC ungleich sind, denn für den Fall, daß diese Seiten gleich sind, ist der Beweis unmittelbar geführt. Ist z. B. $ASB = ASC$ und $ASB + ASC < 2R$, so sind beide Winkel notwendig spitz und die gegenüberliegenden Winkel müssen dann ebenfalls spitz sein.

Ist $ASB = ASC$ und $ASB + ASC = 2R$, so sind die Seitenwinkel Rechte und die gegenüberliegenden Neigungswinkel ebenfalls.

Ist $ASB = ASC$ und $ASB + ASC > 2R$, so müssen beide Seiten der Ecken stumpf sein, die ihnen gegenüberliegenden Winkel müssen ebenfalls stumpf, ihre Summen also auch größer als 2 Rechte sein.

Dies bedarf also keines weiteren Beweises; es bleibt noch übrig, diesen Satz zu beweisen, wenn die Seiten ASB und ASC ungleich sind, wenn z. B. $ASB > ASC$ ist.

I. Hauptfall: $ASB + ASC < 2R$.

Es können hier nun wieder drei besondere Fälle eintreten. Es können sein

1) ASB spitz und ASC spitz.

2) $ASB = 1R$ und $ASC < 1R$.

3) $ASB > 1R$ und $ASC < 1R$, aber kleiner als das Supplement zu ASB.

Die Beweise stützen sich auf die Figuren zu § 10. Es ergiebt sich dann:

Aus der Figur 1a): $AED < 1R$ und $AFD < 1R$.
folglich ist: $AED + AFD < 2R$.

Aus der Figur zu 1b): $AED < 1R$, der Neigungswinkel von ASC gegen $BSC = 1R$

folglich: $AED + 1R < 2R$.

Aus der Figur zu 1c): $AFG + AFD = 2R$.

Da aber nach der Voraussetzung $ASB > ASC$, so ist auch $AE > AF$.

Daraus folgt, daß $AED < AFD$ ist

folglich: $AFG + AED < 2R$.

Aus der Figur zu 2a): Beide Neigungswinkel AED und AFD sind spitz, folglich:

$$AED + AFD < 2R.$$

Aus der Figur zu 2b): Da der Neigungswinkel von ASC zu $BSC = 1R$, der Neigungswinkel von ASB zu $BSC < ASD$ ein spitzer ist, so sind mithin beide zusammen $< 2R$.

Aus der Figur zu 2c): $AFG + AFD = 2R$.

Da aber $AS > AF$, so ist auch $ASD < AFD$, mithin ist

$$AFG + ASD < 2R.$$

Aus der Figur zu 3a): Da AED und AFD beide spitz sind, so ist also ihre Summe

$$AED + AFD < 2R.$$

Aus der Figur zu 3b): Hier ist AED spitz, der Neigungswinkel von ASC zu BSC ein Rechter, mithin ist die Summe beider $< 2R$.

Aus der Figur 3c): $AFG + AFD = 2R$.

Da aber ASC kleiner als das Supplement von ASB, also kleiner als ASB' ist, so ist $AD < AE$ oder $AE > AD$, also

$$AED < AFD.$$

folglich ist: $AFG + AED < 2R$.

II. Hauptfall.

$$ASB + ASC > 2R.$$

Aus der Figur zum III. Hauptfall des § 10 folgt, daß die Summe der Nebenwinkel von ASB und ASC, also hier

$$ASB' + ASC' < 2R$$

ist, mithin ist an der Ecke $SAB'C'$ nach dem I. Hauptfall die Summe der Neigungswinkel von

$$ASB' \text{ und } ASC' \text{ gegen } BSC' < 2R,$$

folglich ist auch die Summe der Neigungswinkel von

$$ASC \text{ und } ASB \text{ gegen } BSC > 2R.$$

Lehrsatz: Legt man durch die Halbierungslinie der Seitenflächen einer dreiseitigen körperlichen Ecke senkrecht zu ihnen Ebenen, so schneiden sich alle drei in einer und derselben geraden Linie.

Lehrsatz: Die Halbierungslinien der Neigungswinkel je zweier Seiten einer dreiseitigen körperlichen Ecke schneiden sich in derselben geraden Linie.



Holzmüller, Dr. **Gustav**, Direktor der Gewerbeschule zu Hag... führung in das stereometrische Zeichnen. Mit Berücksichtigung der Krystallographie und Kartographie. [Mit 16 lithographierten Tafeln.] [VI u. 102 S.] gr. 8. 1886. kart. ℳ 4.40.

Huebner, Dr. **L.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Schweidnitz, ebene und räumliche Geometrie des Maſses in organischer Verbindung mit der Lehre von den Kreis- und Hyperbelfunktionen neu dargestellt. [XVI u. 340 S.] gr. 8. 1888. geh. n. ℳ 8.—

Kober, Dr. **Julius**, Direktor der Realschule zu Groſsenhain, Leitfaden der ebenen Geometrie, mit über 700 Übungssätzen und Aufgaben und 32 in den Text gedruckten Figuren. 2. Aufl. [86 S.] gr. 8. 1884. geh. ℳ 1.—

Lucke, Franz, Gymnasiallehrer in Zerbst, Leitfaden der Stereometrie für den Schulunterricht. Mit neun lithographierten Tafeln. [X u. 204 S.] gr. 8. 1890. geh. ℳ 2.80.

Milinowski, A., Oberlehrer am Gymnasium zu Weiſsenburg i. E., die Geometrie für Gymnasien und Realschulen. 2 Teile. gr. 8. 1881. geh. ℳ 3.80.

Einzeln: I. Teil. Planimetrie. Mit Holzschnitten im Text und 4 Figurentafeln. [VII u. 128 S.] ℳ 2.—
II. — Stereometrie. I. Heft: Lehrbuch. Mit 37 Holzschnitten im Text. [VI u. 46 S.] ℳ —.80.
II. — Übungsbuch. Mit 4 Figurentafeln. [IV u. 58 S.] ℳ 1.—

——— elementar-synthetische Geometrie der Kegelschnitte. Mit Figuren im Text. [XII u. 412 S.] gr. 8. 1882. geh. ℳ 8.80.

——— elementar-synthetische Geometrie der gleichseitigen Hyperbel. Mit vielen Figuren im Text. [X u. 135 S.] gr. 8. 1883. geh. n. ℳ 3.60.

Müller, Dr. **Hubert**, Oberlehrer am Kaiserl. Lyceum in Metz, Leitfaden der ebenen Geometrie. Mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. In zwei Teilen. Erster Teil [in zwei Heften] und mit einem Anhange. gr. 8. geh. ℳ 2.80.

Einzeln: I. Teil. 1. Heft. Die geradlinigen Figuren und der Kreis. Mit Übungen. 3. umgearbeitete Auflage. (Mit vielen Holzschnitten im Text und zwei lithograph. Tafeln.) [VIII, 69 u. 49 S.] 1889. ℳ 1.60.
2. — Erweiterungen zu Teil I und Einleitung in die neuere Geometrie. Mit Übungen. (Mit vielen Holzschnitten im Text u. 2 lithogr. Tafeln.) [36 u. 34 S.] 1878. ℳ 1.20.
II. Teil. Die Kegelschnitte und die Elemente der neueren Geometrie. [VI u. 111 S. mit vielen eingedruckten Holzschnitten.] 1875. ℳ 1.60.

——— Leitfaden der Stereometrie mit Benutzung neuerer Anschauungsweisen für die Schule. In zwei Teilen. Erster Teil: Die Grundgebilde und die einfachsten Körperformen. Mit zahlreichen Holzschnitten und 3 Tafeln. [VIII u. 127 S.] gr. 8. 1877. geh. ℳ 2.—

Pein, Dr. **A.**, Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Bochum, Aufgaben der sphärischen Astronomie, gelöst durch planimetrische Konstruktionen und mit Hülfe der ebenen Trigonometrie. Mit drei Figurentafeln. [VII u. 48 S.] gr. 4. 1883. geh. ℳ 1.20.

Rausenberger, Dr. **Otto**, die Elementargeometrie des Punktes, der Geraden und der Ebene, systematisch und kritisch behandelt. [VI u. 236 S.] gr. 8. 1887. geh. ℳ 5.—

Reidt, Dr. **Friedrich**, Professor am Gymnasium und dem Realgymnasium zu Hamm, Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. ℳ 7.—

Einzeln: I. Teil. Trigonometrie. [VIII u. 247 S.] 3. verb. Aufl. 1884. ℳ 4.—
II. — Stereometrie. [VIII u. 190 S.] 3. verb. Aufl. 1885. ℳ 3.—



Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Reidt, Dr. **Friedrich**, Professor am Gymnasium und dem Realgymnasium zu Hamm, Resultate der Rechnungsaufgaben in der Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der Trigonometrie und Stereometrie. 2 Teile. gr. 8. geh. ℳ 2.80.

Einzeln: I. Teil. Trigonometrie. 3. Aufl. [84 S.] 1885. ℳ 1.80.
II. — Stereometrie. 3. Aufl. [48 S.] 1886. ℳ 1.—

——— die trigonometrische Analysis planimetrischer Konstruktions-Aufgaben. [VIII u. 50 S.] gr. 8. 1882. kart. ℳ 1.20.

Reichaus, Dr. **Th.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Stralsund, Vorschule zur Geometrie. 2 Abteilungen. gr. 8. 1879. geh. ℳ 3.20.

Einzeln: I. Abt. Lehrbuch. [Mit vielen Figuren im Text.] [IV u. 134 S.] ℳ 2.—
II. — Wiederholungs- und Aufgabenbuch. [Mit vielen Figuren im Text.] [86 S.] ℳ 1.20.

Schilke, Dr. phil. **E.**, Oberlehrer am Gymnasium zu Saarburg i./L., Sammlung planimetrischer Aufgaben für den Gebrauch an höheren Schulen. [IV u. 54 S.] gr. 8. 1890. kart. ℳ 1.—

Schlömilch, Dr. **Oskar**, Geh. Schulrat im Königl. Sächsischen Kultusministerium, Grundzüge einer wissenschaftlichen Darstellung einer Geometrie des Maſses. Ein Lehrbuch. gr. 8. geh. ℳ 7.60.

Einzeln: I. Heft. Planimetrie. 7. Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VI u. 163 S.] 1888. ℳ 2.—
II. — Ebene Trigonometrie. 6. Auflage. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VI u. 97 S.] 1883. ℳ 1.60.
II. Teil. Geometrie des Raumes. 3. Auflage. [VII u. 266 S.] 1874. ℳ 4.—
Heft I und II bildeten früher den I. Teil; der II. Teil wird bei der nächsten Auflage in Heft III und IV zerfallen.

Schotten, Dr. **Heinrich**, Inhalt und Methode des planimetrischen Unterrichts. Eine vergleichende Planimetrie. [IV u. 370 S.] gr. 8. 1890. geh. ℳ 6.—

Schüller, **W. J.**, Seminarlehrer in Boppard a/Rh., Arithmetik und Algebra für höhere Schulen und Lehrerseminare. In inniger Verknüpfung mit der Geometrie zur Versinnlichung der Zahlbegriffe, Theorien, Operationen, Lehrsätze und Auflösung von Aufgaben systematisch bearbeitet. gr. 8. 1891. geh. Erscheint vor Ostern.

Schulze, Dr. **Karl**, Lehrer an der Bieberschen Realschule in Hamburg, Leitfaden für den trigonometrischen und stereometrischen Unterricht an höheren Bürger- u. Realschulen. Mit Figuren im Text. 2 Hefte. gr. 8. 1890. kart. je ℳ 1.20.

Einzeln: I. Heft. Trigonometrie. [VIII u. 72 S.]
II. — Stereometrie. [IV u. 60 S.]

Thieme, Dr. **H.**, ord. Lehrer am Realgymnasium zu Posen, Sammlung von Lehrsätzen und Aufgaben aus der Stereometrie. Im Anschluſs an nachgelassene Papiere des Oberlehrers Dr. Kretschmer bearbeitet. [VI u. 92 S.] gr. 8. 1885. kart. ℳ 1.20.

Treutlein u. Henrici, Elementar-Geometrie, siehe Henrici u. Treutlein.

Zehme, Dr. **W.**, Direktor der höheren Gewerbeschule zu Barmen, Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Repetitionstafeln. Für Bürger-, Gewerbe- und höhere Stadtschulen, sowie zum Selbstunterrichte. 6. Auflage. Mit 15 lithographierten Tafeln in besonderem Heft. [VI u. 106 S.] gr. 8. 1880. geh. ℳ 2.40.

Zeuthen, **H. G.**, Grundriss einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. [VI u. 97 S.] gr. 8. 1882. geh. ℳ 2.—

